Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

1º Semestre 2023/2024
5 de Janeiro de 2024
(duração 45 minutos)

Resolução do 3º MAP de ÁLGEBRA LINEAR

1. (a) $T(0,1,1,1) = T\left((0,1,1,0) + (0,0,0,1)\right))$
$= T(0,1,1,0) + T(0,1,1,0) = (0,0,0,0) + 1(1+t) + 1(1-t) + 1(1+t+t^2) = 3 + t + t^2$.

   (b) Como $\{(0,1,0,0)\}$ é uma base $\mathcal{N}(A)$, $\{(0,1,1,0)\}$ é uma base de $\mathcal{N}(T)$ pois $(0,1,1,0)_{\mathcal{B}_1} = (0,1,0,0)$. Mais, $P_{\mathcal{N}(T)}(0,2,0,0) = \frac{\langle (0,2,0,0),(0,1,1,0)\rangle}{\langle (0,1,1,0),(0,1,1,0)\rangle}(0,1,1,0) = (0,1,1,0)$. Assim
$d((0,2,0,0,\mathcal{N}(T)) = ||(0,2,0,0) - P_{\mathcal{N}(T)}(0,2,0,0)|| = ||(0,1,-1,0)|| = \sqrt{2}$.

   (c) Por a), $(0,2,2,2)$ é uma solução de $T(u) = 6 + 2t + 2t^2$. Além disso, por b), $\{(0,1,1,0)\}$ é uma base de $\mathcal{N}(T)$. Logo, $\{u : T(u) = 6 + 2t + 2t^2\} = \{(0, 2+\alpha, 2+\alpha, 2) : \alpha \in \mathbb{R}\}$.

2. $A^TA = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, pelo que $\sigma_1 = \sqrt{25} = \sigma_2$, $\Sigma = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}$ e $V = I$, pois $A^TA = VDV^T$ com D=diag$(25,25,0)$. As 2 colunas de U são $u_1 = \frac{1}{\sigma_1}Av_1 = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ e $u_2 = \frac{1}{\sigma_2}Av_1 = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}$.

   Assim uma decomposição SVD de A é: $A = U\Sigma V^T = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

3. Note que $\langle 1+t, 1+t \rangle = 6$, pelo que $T(q) = 6q$. Se $w \perp q$ então $T(w) = 0$, obtendo assim uma tal base $\{q, w\}$, com $w(t) = 1 - t$ por exemplo.

4. Sejam $\lambda_1, ..., \lambda_n$ os valores próprios de A. Então tr(A)=$\lambda_1 + ... + \lambda_n$ e tr(A^{-1})=$\frac{1}{\lambda_1} + ... + = \frac{1}{\lambda_n}$. A deigualdade pretendida resulta da aplicação da desigualdade de Cauchy-Schwarz com os vectores $(\sqrt{\lambda_1}, ..., \sqrt{\lambda_n})$ e $(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}, ..., \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}})$ de $\mathbb{R}^n$.