Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

1º Semestre 2023/2024
28 de Novembro de 2023
(duração 45 minutos)

Resolução 2º MAP de ÁLGEBRA LINEAR

1. Usando operações elementares temos:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & -4 & 6 & 8 & 1 \\ -2 & 4 & -3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[2L_1+L_3]{-2L_1+L_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

(a) Como o sistema anterior é impossível, $(1,1,1,1) \notin V$. As mesmas operações elementares mostram que $\dim(V) = 2$ e $\{(1,2,-2,0),(3,6,-3,0)\}$ é uma base de V. Logo $\dim(V+V) = 2$ pois $V+V = V$.

(b) Por (a), $(2,2,2,2) \notin V$ logo $V \cap W = \{0\}$, isto é, $\dim(V \cap W) = 0$.

(c) Note que ambos os espaços lineares têm dimensão 2 (para $k \neq 0$). Usando a base de a), basta ver quando é que $(1,2,-2,0),(3,6,-3,0) \in \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : k^2x - ky = 0 \ \text{ e } \ kw = 0\}$, isto é, $k^2 - 2k = 0$ e $k \neq 0$. Logo $k = 2$.

2. Como $p(\lambda) = (7-\lambda)^4$, $\lambda_1 = 7$ é o único valor próprio de A com $\text{ma}(\lambda_1) = 4$ e $\text{mg}(\lambda_1) = \dim\mathcal{N}(A-5I) = 2$. Assim, a matriz J vai ter 2 blocos de Jordan associados a λ_1. Como

$$(A-7I)(A-7I) = \mathbf{0},$$

o maior bloco de Jordan tem tamanho 2×2, pelo que $J = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$. Para determinar as colunas de S tais que $A = SJS^{-1}$, vamos encontrar uma base de $E(\lambda_1)$ e em seguida fixar v_2 e w_2 (que serão as 2ª e 4ª colunas de S) tais que sejam LI e que $v_2, w_2 \notin E(\lambda_1)$ e de tal forma que $\{Av_2, v_2, Aw_2, w_2\}$ seja um base de $\mathbb{R}^4$. Ora $E(\lambda_1) = \{(x,y,z,w) : 3z + 2w = 0 \ e \ 4w = 0\}$ cuja base é $\{(1,0,0,0),(0,1,0,0)\}$. Assim $v_2 = (0,0,1,0)$ e $w_2 = (0,0,0,1)$ satisfazem as condições (garantindo a invertibilidade da matriz S). Como

$$(A-7I)[v_2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (A-7I)[w_2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

obtemos a matriz $S = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (que é invertível).

3. A matriz A é 4×4 e tem dois valores próprios diferentes $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = 4$, cada um é zero duplo. Pelo teorema de Jordan, A é semelhantes a uma matriz J em forma canónica de Jordan, $A = SJS^{-1}$, em que o maior bloco de Jordan associado a cada valor próprio tem no máximo de tamanho 2: $J_2(\lambda_i)$. Como $J_2(\lambda_i)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda_i} & * \\ 0 & \frac{1}{\lambda_i} \end{bmatrix}$, a matriz A^{-1} vai ser semelhante a J^{-1}, que é triangular superior e cada entrada na diagonal é o inverso do valor pp (correspondente) de A. Logo $p_{A^{-1}}(\lambda) = (\lambda - \frac{1}{3})^2(\lambda - \frac{1}{4})^2$.

4. Seja $U = L(\{v - v_1, v - v_2, v - v_3, v - v_4\})$ e para cada i seja $w_i = v - v_i$. Como $w_1 - w_i = v_i - v_1 \in U$, basta mostrar que $v_2 - v_1, v_3 - v_1$ e $v_4 - v_1$ são L.I. Ora, se $\alpha_1(v_2 - v_1) + \alpha_2(v_3 - v_1) + \alpha_3(v_4 - v_1) = \mathbf{0}$ então $(-\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3)v_1 + \alpha_1 v_2 + \alpha_2 v_3 + \alpha_3 v_4 = \mathbf{0}$. Mas $v_1, ..., v_4$ são LI, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, como protendido.