Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

1º Semestre 2023/2024
10 de Outubro de 2023
(duração 45 minutos)

Resolução 1º MAP de ÁLGEBRA LINEAR

1. Usando operações elementares temos:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & \alpha & 0 \\ \alpha & 0 & \alpha & 1 \\ -2 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow[2L_1+L_4]{\substack{L_1+L_2,\\ -\alpha L_1+L_3}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1+\alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

(a) Assim, o sistema linear é indeterminado para $\alpha = 1$. Para $\alpha \neq 1$, o sistema é impossível.

(b) Para $\alpha = 1$, y é a variável livre e assim $\mathcal{S} = \{(\frac{1}{2}, y, \frac{1}{2}) \in \mathbb{R}^3 : y \in \mathbb{R}\}$.

2. Em primeiro lugar, note-se que $\det\left(2\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 9 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\right) = 2^3 \det\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \end{bmatrix} \det\begin{bmatrix} 1 & 9 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = -8$ e $\left(\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} A^T\right)^T = A\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ pelo que a equação é equivalente a $A(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} - I) = -8I$, isto é

$$A = -8\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = 8\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. Sabemos que $(A^{-1})_{(2,3)} = \frac{(-1)^{2+3}\det(A_{3,2})}{\det A}$. Como $\det A = 3\det\begin{bmatrix} 11 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 0 \end{bmatrix} = -3\det\begin{bmatrix} 11 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = -3(22-20) = -6$ (usando a Regra de Laplace, na 2ª coluna de A e depois na 3ª coluna) e $\det(A_{32}) = \det\begin{bmatrix} 11 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 9 & 0 & 3 \end{bmatrix} = -4\det\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 9 & 3 \end{bmatrix} = 0$, concluímos que $(A^{-1})_{(2,3)} = 0$.

4. Sabendo a 1ª linha e sendo simétrica, então $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & a & b \\ 4 & b & c \end{bmatrix}$. Para que $\mathrm{car}(A) = 1$ as linhas 2 e 3 de A têm de ser multiplas da 1ª, pelo que a 2ª é -2 vezes a 1ª e a 3ª é 4 vezes a 1ª. Logo $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 4 & -8 \\ 4 & -8 & 16 \end{bmatrix}$.

5. Basta considerar a matriz por blocos $C = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$. Tem-se $\mathcal{N}(C) = \mathcal{N}(A) \cap \mathcal{N}(B)$.

6. Como A é não nvertível temos $A\ \mathrm{cof}(A)^T = \mathbf{0}$. Se $\mathrm{cof}(A)$ fosse invertível então multiplicando a equação matricial por $(\mathrm{cof}(A)^T)^{-1}$ vamos concluir que $A = \mathbf{0}$. Mas se $A = \mathbf{0}$ então $\mathrm{cof}(A) = \mathbf{0}$ que é contraditório, pelo que $\mathrm{cof}(A)$ é não invertível.