1º Semestre 2023/2024
18 de Janeiro de 2024

Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Resolução do Exame de Recuperação de ÁLGEBRA LINEAR

Grupo I

1. Usando operações elementares temos:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & \alpha & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & \alpha & \alpha^2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[-\alpha L_1+L_3]{L_1+L_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha+1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha^2-\alpha & -\alpha \end{array}\right].$$

(a) Assim, o sistema linear é impossível para $\alpha = \pm 1$. Para $\alpha \neq \pm 1$, o sistema é indeterminado.
(b) Para $\alpha = 0$, y e w são variáveis livres e $\mathcal{S} = \{(0, y, 1-w, w) \in \mathbb{R}^4 : y,\ z \in \mathbb{R}\}$.
2. Em primeiro lugar, note-se que $\det(2B) = 2^3\det(B) = -16$, $\det\left(\begin{bmatrix} \det(2B) & 4 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}\right) A = \mathbf{0}$ e $\operatorname{tr}(SXS^{-1})$ $=\operatorname{tr}(X)$ pelo que a equação é equivalente a $A\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = 5I$, logo $A = 5\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.
3. Sabemos que $(A^{-1})_{(1,3)} = \frac{(-1)^{3+1}\det(A_{3,1})}{\det A}$. Como $\det A = -2\det\begin{bmatrix} 7 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 2\det\begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = 38$ e $\det(A_{3,1}) = \det\begin{bmatrix} 5 & 2 & 15 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ $= 3\det\begin{bmatrix} 5 & 15 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = 0$, concluímos que $(A^{-1})_{(2,3)} = 0$.
4. $A = (P_{12}E_{12}(3))^{-1}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = E_{12}(-3)P_{12}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$. Logo $A\mathtt{x} = b$ impossível para $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ com $b_1 \neq 0$.
5. Como A é não invertível, temos $\operatorname{cof}(A)A^T = \mathbf{0}$. Se $A = \mathbf{0}$ então $\operatorname{cof}(A) = \mathbf{0}$. Se $A \neq \mathbf{0}$ então existe uma coluna de A^T não nula pelo que essa coluna pertence a $\mathcal{N}(\operatorname{cof}(A))$ pois $\operatorname{cof}(A)\ A^T = \mathbf{0}$; donde $\operatorname{cof}(A)$ é não invertível.

Grupo II

1. Usando operações elementares temos: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & k \\ 0 & -3 & 1 & k \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[3L_2+L_3]{-L_1+L_4} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & k \\ 0 & 0 & -2 & 4k \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{-\frac{1}{2}L_3+L_4} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & k \\ 0 & 0 & -2 & 4k \\ 0 & 0 & 0 & 2k \end{array}\right].$
(a) $(1, k, k, 1) \in V$ sse o sistema linear acima for possível sse $k = 0$. Uma base de V é $\{(1,0,0,1), (0,1,-3,0), (0,-1,1,1)\}$.
(b) Como $(1,2,2,1) \notin V_1$, $V_1 + V_2 = \mathbb{R}^4$, logo $\dim\ (V_1+V_2) = 4$ e assim $\dim(V_1 \cap V_2) = 1$.
(c) $\{(1,0,0,1), (1,2,2,1)\}$ é uma base de V_2 e $(3,-4,-4,3) = \alpha_1(1,0,0,1) + \alpha_2(1,2,2,1)$ implica $\alpha_1 = 5$ e $\alpha_2 = -2$.
2. $\lambda = 5$ é o único valor próprio de A com $\operatorname{ma}(\lambda)=5$. Por outro lado, $\dim\mathcal{N}(A-5I) = 2$ (logo temos 2 blocos de Jordan), $\dim\mathcal{N}(A-5I)^2 = 4$ e $\dim\mathcal{N}(A-5I)^3 = 5$. Assim $J = \operatorname{diag}(J_3(5), J_2(5))$.
3. Fazendo $A = \mathbf{0}$ temos $(0,0,0) \in U$. Se $u, v \in U$ então $u + \alpha v \in U$, pois se $u = A\mathtt{x}$ e $v = B\mathtt{x}$ então $u + \alpha v = (A+\alpha B)\mathtt{x}$. Seja $\mathtt{x} \neq 0$, então considerando as matrizes E_{ij} todo nula excepto a entrada (i,j) que é 1, então $E_{ij}\mathtt{x}$ é um multiplo de um dos vectores da base canónica de $\mathbb{R}^3$ (e cada vector canónico pode ser pode ser obtido desta forma), pelo que $U = \mathbb{R}^3$
4. É suficiente mostrar que AB e BA são semelhantes: $AB = A(BA)A^{-1}$.

Grupo III

1. (a) $T(1,1,1) = T((1,0,0) + (0,1,1)) = 3(1+t)$.
(b) $\{(0,1,0)\}$ é uma base de $\mathcal{N}(A)$ e $\{(0,1,1)\}$ é uma base de $\mathcal{N}(T)$, logo $d((3,1,-1), \mathcal{N}(T)) = ||(3,1,-1) - P_{\mathcal{N}(T)}(3,1,-1)|| = \sqrt{11}$.
(c) Como $() - 3 - t)_{\mathcal{B}_2} = (-2,-1,0)$ e $(-2,-1,0) \notin \mathcal{C}(A)$ a eq. linear não tem soluções.
(d) Note que sendo S invertível $\operatorname{car}(SA)$ $=\operatorname{car}(B)$, pelo que não existe tal base.
2. Se $B = U\Sigma V^T$ é uma VD de B então $B^T = V\Sigma^T U$ é uma SVD de B^T pelo que basta fazer uma SVD de B onde $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. Ora, $B^TB = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$. Assim $\Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$ e $V = P_{12}$. As 3 colunas de U são $u_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}Bv_1 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{1}}{3} \\ \frac{\sqrt{1}}{3} \\ \frac{\sqrt{1}}{3} \end{bmatrix}$ e $u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}Av_2 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$ e $u_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ por ser base o.n. de $\mathcal{N}(B^T)$. Assim $A = U\Sigma V^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{1}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{1}}{3} & 0 & -\frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{1}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} \end{bmatrix}^T$.
3. $f(u) = uAu^T = u\frac{A+A^T}{2}u^T = u\frac{\mathbf{0}}{2}u^T = 0$ para todo o $u \in \mathbb{R}^4$ (pois $A + A^T = \mathbf{0}$ dado que $A = -A^T$).
4. Sendo $\lambda_1, ..., \lambda_r$ os valores próprios não nulos de A temos $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_r, 0, ..., 0)$ matriz diagonal e existe Q ortogonal tal que $A = QDQ^T$. Definindo a matriz $R = \operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1}, ..., \sqrt{\lambda_r})$ do tipo $n \times r$ (restantes entradas são nulas) temos $RR^T = D$ pelo que $A = SS^T$ usando $S = QR$.