Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

1º Semestre 2023/2024
18 de Janeiro de 2024

## EXAME DE RECUPERAÇÃO DE ÁLGEBRA LINEAR – LEAer

Duração para a recuperação de um só MAP = 40 minutos
Duração para a recuperação de todos os MAPs (Exame) = 120 minutos
Nota do Exame = (Nota do Grupo I + Nota do Grupo II + Nota do Grupo III)/3

### JUSTIFIQUE TODAS AS RESPOSTAS

### Grupo I (40 minutos) – 1º MAP

1. Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ considere o sistema de equações lineares $A\mathbf{x}=b$ cuja matriz aumentada é

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & \alpha & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & \alpha & \alpha^2 & 0 \end{array}\right].$$

   (a) (4.0) Discuta o tipo de solução do sistema linear $A\mathbf{x} = b$ em função de $\alpha$.

   (b) (3.0) Para $\alpha = 0$, encontre o conjunto solução do sistema linear $A\mathbf{x} = b$.

2. (4.0) Seja $B$ matriz $3 \times 3$ tal que $\det(B) = -2$. Determine, caso existam, todas as matrizes $A$ tais que

$$A \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1} + \det\left(\begin{bmatrix} \det(2B) & 4 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}\right) A = \operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}^{-1}\right) I.$$

3. (5.0) Calcule a entrada $(1, 3)$ de $A^{-1}$ onde $A = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 2 & 15 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

4. (2.0) Considere a matriz $A \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ tal que $P_{12}E_{12}(3)A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ onde $P_{12}$ e $E_{12}(3)$ são matrizes elementares. Caso exista, encontre $b$ tal que o sistema linear $A\mathbf{x} = b$ seja impossível.

5. (2.0) Seja $A$ matriz não invertível. Mostre que a matriz dos cofactores $\operatorname{cof}(A)$ é não invertível.

## Grupo II (40 minutos) – 2º MAP

1. Sejam $V_1$ e $V_2$ os seguintes subespaços lineares de $\mathbb{R}^4$:

$$V_1 = L(\{(1,0,0,1),(0,1,-3,0),(0,-1,1,1)\} \text{ e } V_2 = L(\{(1,0,0,1),(1,2,2,1)\}.$$

   (a) (4.0) Caso existam, identifique todos os $k$ tais que $(1,k,k,1) \in V_1$. Determine uma base para $V_1$.

   (b) (4.0) Calcule $\dim(V_1 \cap V_2)$ e $\dim(V_1 + V_2)$.

   (c) (3.0) Encontre as coordenadas de $(3,-4,-4,3)$ numa base de $V_2$ à sua escolha.

2. (4.0) Encontre a matriz $J$ em forma canónica de Jordan associada à matriz $A=\begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$.

3. (3.0) Seja $\mathtt{x}$ matrix real $3 \times 1$ e considere $U = \{A\mathtt{x} \in \mathcal{M}_{3\times1}(\mathbb{R}) : A \in \mathcal{M}_{3\times3}(\mathbb{R})\}$. Mostre que $U$ é um subespaço linear de $\mathcal{M}_{3\times1}(\mathbb{R})$. Para $\mathtt{x} \neq \mathbf{0}$, determine uma base de $U$.

4. (2.0) Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ com $A$ invertível. Mostre que os polinómios característicos de $AB$ e $BA$ coincidem.

## Grupo III (40 minutos) – 3º MAP

1. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathcal{P}_2$ a transformação linear cuja representação matricial é $A = M(T; \mathcal{B}_1; \mathcal{B}_2)$ onde

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ \mathcal{B}_1=\{(1,0,0),(0,1,1),(0,1,-1)\} \text{ e } \mathcal{B}_2= \{1+t,\ 1-t,\ 1+t+t^2\}.$$

   (a) (4.0) Calcule $T(1,1,1)$.

   (b) (3.0) Calcule a distância entre $(3,1,-1)$ e o núcleo $\mathcal{N}(T)$ de $T$, usando o produto interno usual.

   (c) (3.0) Resolva, em $\mathbb{R}^3$, a equação linear $T(u) = -3-t$.

   (d) (1.0) Verifique se existe uma base $\mathcal{B}'$ de $\mathcal{P}_2$ tal que $S_{\mathcal{B}_2\to\mathcal{B}'}\ A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

2. (5.0) Encontre uma decomposição em valores singulares (SVD) da matriz $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

3. (2.0) Seja $A$ antisimétrica $4\times4$. Verifique se a forma quadrática $f(x,y,z,w)=[x\ y\ z\ w]A\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}$ depende de $A$.

4. (2.0) Seja $A$ matriz real $n \times n$ com car$(A)$=$r$. Mostre que se $A$ é semidefinida positiva então existe $S$ matriz. $n \times r$ tal que $A = SS^T$.