Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

1º Semestre 2022/2023
6 de Dezembro de 2022
(duração 45 minutos)

Resolução 2º MAP de ÁLGEBRA LINEAR

1. Usando operações elementares temos

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -6 & -1 & k \\ 1 & 0 & 1 & 0 & k \end{array}\right] \xrightarrow{-L_1+L_4} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -3 & -1 & k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k-1 \end{array}\right] \xrightarrow{3L_2+L_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & k+6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k-1 \end{array}\right] . (*)$$

(a) Assim, $(1,2,k,k) \in V_1$ sse o sistema linear (*) for possível sse $k=1$. Usando novamente (*), podemos concluir que $\{(1,1,-3,0),(0,1,-3,0),(0,1,-1,0)\}$ é uma base de V_1 (colunas da matriz incicial correspondentes à colunas da matriz final com pivô).

(b) Por (a), $V_2 \subset V_1$, pelo que $\dim(V_1 \cap V_2) = 1$ e $\dim(V_1 + V_2) = 3$, pois $V_1 \cap V_2 = V_2$ e $V_1 + V_2 = V_1$.

2. O polinómio característico de A é $p(\lambda)=\det \begin{bmatrix} 5-\lambda & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 5-\lambda \end{bmatrix} = (5-\lambda)^4$, pelo que $\lambda_1 = 5$ é o único valor próprio de A com $\text{ma}(\lambda_1) = 2$ e $\text{mg}(\lambda_1) = \dim\mathcal{N}(A-5I) = 1$. Assim J tem um único bloco de Jordan, pelo que $J = J_4(5)$. Vamos encontrar $v_4 \in G(\lambda_1, 4)$ tal que $v_4 \notin G(\lambda_1, 3)$. Como

$$A-5I=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \ (A-5I)^2=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ (A-5I)^3=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } (A-5I)^4=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

podemos considerar $v_4 = (0,0,1,0)$. Assim $v_3 = (A-5I)v_4 = (0,0,0,3)$, $v_2 = (A-5I)^2 v_4 = (0,3,0,0)$ e $v_1 = (A-5I)^3 v_4 = (6,0,0,0)$ pelo que temos $J = S^{-1}AS$ com:

$$J = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad S = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

3. Como $\mathcal{N}(B^T) \subset \mathbb{R}^4$, B^T tem de ter 4 colunas, pelo que $m = 4$ e portanto B é 4×2. Por outro lado, $\dim(\mathcal{N}(B^T)) = 2$ pelo que $\text{car}(B)=\text{car}(B^T) = 2$. Assim $\dim(\mathcal{L}(B)) = 2$ e $\mathcal{L}(B) \subset \mathbb{R}^2$, pelo que $\mathcal{L}(B) = \mathbb{R}^2$ para qualquer matriz B. Logo qualquer base de $\mathbb{R}^2$ responde à questão (p.ex., a base canónica). Note que há muitas tais matrizes B!

4. Em primeiro lugar, λ é valor próprio de C então λ^j é valor próprio de C^j pois $Cu = \lambda u$ implica $C^j u = \lambda^j u$. Portanto $\lambda = 0$ é o único valor próprio de C pois $C^j = \mathbf{0}$. Usando a Jordanização de C temos $C^n = SJ^nS^{-1}$, pelo vamos mostrar que $J^n = \mathbf{0}$, que é verificar que $J_k(0)^n = \mathbf{0}$ para cada bloco de Jordan $J_k(0)$ que aparece em J. Como $J_k(0)^k = \mathbf{0}$ e $k \leq n$ (dado que $J_k(0)$ é um bloco de Jordan de J), $J_k(0)^n = \mathbf{0}$ para cada bloco $J_k(0)$ de J. Assim $J^n = \mathbf{0}$ e portanto $C^n = \mathbf{0}$.