Instituto Superior Técnico

Departamento de Matemática

1º Semestre 2022/2023
19 de Outubro de 2022
(duração 45 minutos)

Resolução 1º MAP de ÁLGEBRA LINEAR

1. Usando operações elementares temos:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & \alpha^2-1 & 1 & \alpha & 1-\alpha^2 \\ 3 & 0 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right] \underset{-L_1+L_2}{\xrightarrow{-3L_1+L_2}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha^2-1 & 0 & \alpha-1 & 1-\alpha^2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right].$$

(a) Assim, o sistema linear é indeterminado para $\alpha \neq \pm 1$. Para $\alpha = -1$, o sistema é impossível e para $\alpha = 1$ é indeterminado.

(b) Para $\alpha = 1$ podemo escolher y e z para variáveis livres e assum $\mathcal{S} = \{(1-z, y, z, -1) \in \mathbb{R}^4 : y, z \in \mathbb{R}\}$.

2. Em primeiro lugar, note-se que $\operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = 2$, pelo que a equação matricial é equivalente a: $A\begin{bmatrix} 3 & 11 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = 2A$. Multiplicando à direita por $\begin{bmatrix} 3 & 11 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ temos

$$A = 2A\begin{bmatrix} 3 & 11 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

isto é: $A(I - 2\begin{bmatrix} 3 & 11 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Como $I - 2\begin{bmatrix} 3 & 11 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -11 \\ -1 & -7 \end{bmatrix}$ é invertível (determinante diferente de zero), a única solução é $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

3. Sabemos que $(A^{-1})_{(3,1)} = \frac{(-1)^{1+3}\det(A_{1,3})}{\det A}$. Como $\det A = -2\det\begin{bmatrix} 7 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} = -(-2)\det\begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = 38$ (usando a Regra de Laplace, na 3ª coluna de A e depois novamente na 3ª coluna) e $\det(A_{13}) = \det\begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 15 & 0 & 3 \end{bmatrix} = 3(15-15) = 0$, concluímos que $(A^{-1})_{(3,1)} = \frac{0}{28} = 0$.

4. Temos $A^2 = \begin{bmatrix} -6 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ e $A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, pelo que $\operatorname{car}(A^4) = 0$.

5. Sabemos que $\det(BB^T) = 0$ sse BB^T não invertível sse existe $\mathtt{x}_0 \neq 0$ tal que $(BB^T)\mathtt{x}_0 = \mathbf{0}$. Ora como B^T é 4×6, o sistema homogéneo $B^T\mathtt{x} = \mathsf{0}$ é indeterminado, pelo que existe uma solução $\mathtt{x}_0$ de $B^T\mathtt{x} = 0$ com $\mathtt{x}_0 \neq \mathsf{0}$. Usando essa solução temos: $(BB^T)\mathtt{x}_0 = B(B^T\mathtt{x}_0) = B0 = \mathbf{0}$, como pretendido.