$2^{\text{o}}$ Semestre 2022/2023
10 de Fevereio de 2023
(duração 120 minutos)

# Resolução do EXAME DE 2ª ÉPOCA DE ÁLGEBRA LINEAR

1. Como, $\begin{bmatrix}\det(-A) & 2\\ 0 & \det(2A^{-1})\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 2\\ 0 & -4\end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix}3 & -3\\ 3 & -3\end{bmatrix}^2=\mathbf{0}$, a equação matricial é equivalente a $[2\ \ -1]\begin{bmatrix}64 & 14\\ 0 & -1\end{bmatrix}X=[0\ \ 0]$, logo $[128\ \ 27]X=[0\ \ 0]$. Portanto $X=\begin{bmatrix}-27s & -27t\\ 128s & 128t\end{bmatrix}$ com $s,t\in\mathbb{R}$.

2. $\det(A)=\det\begin{bmatrix}7 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}\det\begin{bmatrix}3 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix}=22\neq 0$ pelo que $A$ é invertível e $(A^{-1})_{(4,1)}=\frac{(-1)^5\det A_{1,4}}{\det A)}=\frac{(-1)^5\det\begin{bmatrix}3 & 4 & 1\\ 0 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}}{\det A)}=0.$

3. (a) $V=\{(-y,y,-w,w): y,w\in\mathbb{R}\}$ logo $\{(-1,1,0,0),(0,0,-1,1)\}$ é uma base de $V=V+V$.
(b) Como $(1,1,1,1)\perp(-1,1,0,0)$ e $(1,1,1,1)\perp(0,0,-1,1)$, então $(1,1,1,1)\in V^{\perp}$, logo $d((1,1,1,1),V^{\perp})=0$.

4. (a) $\begin{bmatrix}3 & 3\\ 1 & 1\end{bmatrix}=a\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 0\end{bmatrix}+d\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ implica $a=1$, $b=0$, $c=1$ e $d=1$, isto é, $\left(\begin{bmatrix}3 & 3\\ 1 & 1\end{bmatrix}\right)_{\mathcal{B}_1}=(1,0,1,1)$.
(b) $T(\begin{bmatrix}3 & 3\\ 1 & 1\end{bmatrix})=1T(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix})+0T(\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix})+1T(\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 0\end{bmatrix})+1T(\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix})=T(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix})=1(1+t)-2(t^2)=1+t-2t^2$.
Como $\dim(\mathcal{I}(T))\neq\dim(\mathcal{P}_2)$, $T$ não é sobrejectiva.
(c) Como $\dim\mathcal{N}(T)=2=\dim\mathcal{I}(T)$ podemos concluir que $\mathcal{N}(T)\simeq\mathcal{I}(T)$.

5. $A^TA=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$, cujos valores próprios são $\lambda_1=\lambda_2=2$ e $\lambda_3=1$ e se $V=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$, temos a decomposição $A^TA=V\ \mathrm{diag}(2,2,0)\ V^T$. Em seguida calculamos as 3 colunas de $U$, por um lado temos
$u_1=\frac{1}{\sigma_1}Av_1=\frac{1}{\sqrt2}\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt2}\begin{bmatrix}1\\ 0\\ -1\end{bmatrix}$, $u_2=\frac{1}{\sigma_2}Av_1=\frac{1}{\sqrt2}\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt2}\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$ e $u_3=\frac{1}{\sigma_3}Av_1=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 0\end{bmatrix}$.
Assim, uma decomposição SVD de $A$ é:
$$A=U\Sigma V^T=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt2}{2} & \frac{\sqrt2}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -\frac{\sqrt2}{2} & \frac{\sqrt2}{2} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt2 & 0 & 0\\ 0 & \sqrt2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}^T.$$

6. Por exemplo, $cB=(\frac{c}{|c|}U)(|c|\Sigma)V^T$ é uma decomposição SVD de $cB$ para $c\neq 0$ (para $c=0$, p.ex. $\mathbf{0}=U\mathbf{0}V^T$).

7. Os valores próprios da matriz simétrica $A^TA$ são não negativos. Por outro lado, $\dim(\mathcal{N}(A^T))=1$ implica $\mathrm{car}(A^T)=3$, logo $\mathrm{car}(A)=\mathrm{car}(A^TA)=3$, pelo que a matriz simétrica $A^TA$ é invertível. Consequentemente, $\lambda=0$ não é valor pp de $A^TA$, logo $\sigma(A^TA)\subset\mathbb{R}^+$, implicando que $Q$ seja definida positiva.

8. Sejam $c_1,...,c_6$ escalares tais que $\sum_{i=1}^6 c_iA_iS=\mathbf{0}$. Logo $\left(\sum_{i=1}^6 c_iA_i\right)S=\mathbf{0}$. Como $S$ é invertível, $\sum_{i=1}^6 c_iA_i=\mathbf{0}$. Assim $c_1=...=c_6=0$ pois $A_1,...,A_6$ são LI. Portanto $A_1S,...,A_6S$ são LI. Como $\dim(\mathcal{M}_{2\times3}(\mathbb{R}))=6$, podemos concluir que $\{A_1S,...,A_6S\}$ é uma base de $\mathcal{M}_{2\times3}(\mathbb{R})$.

9. Como $(A+B)^T(A+B)=A^TA+A^TB+B^TA+B^TB$ e $(A+B)(A+B)^T=AA^T+AB^T+BA^T+BB^T$, para mostrar que $A+B$ é normal é suficiente mostrar que $B^TA=A^TB=\mathbf{0}=BA^T=AB^T$.
Como $\mathcal{C}(A)\subset\mathcal{C}(B)^{\perp}=\mathcal{L}(B^T)^{\perp}$, cada coluna de $A$ é ortogonal a todas as linhas de $B^T$. Logo $B^TA=\mathbf{0}$ (e aplicando a transposta nesta eq. temos $A^TB=\mathbf{0}$).
Em seguida recordar que $\mathcal{N}(X)=\mathcal{N}(X^TX)$, logo $\mathcal{N}(X)^{\perp}=\mathcal{C}(X^T)$, para qq matriz $X$. Assim
$$\mathcal{C}(A^T)=\mathcal{N}(AA^T)^{\perp}=\mathcal{N}(A^TA)^{\perp}=\mathcal{C}(A)$$
onde se usou a hipótese de $A$ ser normal na 2ª igualdade. Logo $\mathcal{C}(A^T)=\mathcal{C}(A)$ (e analogamente $\mathcal{C}(B^T)=\mathcal{C}(B)$). Assim temos $\mathcal{C}(A^T)\subset\mathcal{C}(B)^{\perp}$ pelo que usando o argumento do $2^{\text{o}}$ parágrafo, concluí-se que $BA^T=\mathbf{0}=AB^T$.