Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

1º Semestre 2022/2023
26 de Janeiro de 2023
(duração 60 minutos)

Resolução do 1º EXAME DE ÁLGEBRA LINEAR

1. (a) Como $(2+2t+t^2)_{\mathcal{B}_1} = (1,0,1)$, $T(2+2t+t^2) = T(1+t) + T(1+t+t^2) = (3,0,0) - (0,1,1) = (3,-1,-1)$.

   (b) $T(1+t) = (3,0,0)$ e $T(1+t+t^2) = (0,-1,-1)$. Como dim $\mathcal{I}(T) = 2$, $\{(3,0,0),(0,1,1)\}$ é uma base de $\mathcal{I}(T)$, logo $\{(0,1,-1)\}$ é uma base de $\mathcal{I}(T)^\perp = \mathcal{N}\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Assim
$$d((0,2,0),\mathcal{I}(T)) = ||P_{\mathcal{I}(T)^\perp}(0,2,0)|| = ||\tfrac{\langle(0,2,0),(0,-1,1)\rangle}{\langle(0,-1,1),(0,-1,1)\rangle}(0,-1,1)|| = \sqrt{2}.$$

   (c) Como $(-3,1,-1) \notin \mathcal{I}(T)$, a equação linear não tem soluções. Alternativamente, como $(-3,1,-1)_{\mathcal{B}_2} = (-3,0,1)$ e o sistema $A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ é impossível, a eq. linear não tem soluções.

   (d) Como $\dim(\mathcal{I}(T)) = 2 = \dim(\mathcal{P}_1)$, podemos concluir que $\mathcal{I}(T) \simeq \mathcal{P}_1$.

2. $A^TA = \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 25 \end{bmatrix}$, pelo que $\lambda_1 = 25$ é o único valor próprio (com ma(λ_1)=2) de A^TA. Obviamente que uma diagonalização ortogonal desta matriz simétrica é $A^TA = V\ \text{diag}(25,25)\ V^T$ com $V = I$. Neste caso, $\sigma_1 = \sigma_2 = \sqrt{25} = 5$. Em seguida calculamos as 3 colunas de U, por um lado temos
$$u_1 = \frac{1}{\sigma_1}Av_1 = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u_2 = \frac{1}{\sigma_2}Av_2 = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \\ 0 \end{bmatrix}.$$
   Por outro lado $\{(0,0,1)\}$ é uma base (ortonormal) de $\mathcal{N}(A^T)$, pelo que temos a decomposição SVD de A é:
$$A = U\Sigma V^T = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} & 0 \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^T.$$

3. Se λ é tal que $T(3t-1) = \lambda(3t-1)$, isto é $3(2t+k) - 1 = \lambda(3t-1)$, logo $\lambda = 2$ e $3k - 1 = -2$, logo $k = -\frac{1}{3}$.

4. $A^TA \neq \mathbf{0}$ porque $A \neq \mathbf{0}$; além disso, A^TA é não invertível pois car(A^TA) =car$(A) \leq 2$. Como $\sigma(A^TA) \subseteq \mathbb{R}_0^+$ (note que, escrevendo u em coluna, $Q(u) = u^TA^TAu = \langle Au, Au\rangle \geq 0$) pelo que a forma quadrática é semidefinida positiva.

   Finalmente, $(1,2,3) \in \mathcal{L}(A)^T = \mathcal{N}(A)$, portanto $Q(1,2,3) = 0$ pelo que $Q(x,y,z) \geq Q(1,2,3)$ para qualquer $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, pois Q é semidefinida positiva e 0 é um mínimo.

5. Seja $B = PA$. Então $P^{\frac{1}{2}}AP^{\frac{1}{2}} = P^{-\frac{1}{2}}PAP^{\frac{1}{2}} = P^{-\frac{1}{2}}BP^{\frac{1}{2}}$. Logo B é semelhante à matriz diagonalizável $P^{\frac{1}{2}}AP^{\frac{1}{2}}$ (por ser simétrica). Logo B é diagonalizável.