Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

1º Semestre 2022/2023
10 de Fevereiro de 2023
(duração 120 minutos)

EXAME DE 2ª ÉPOCA DE ÁLGEBRA LINEAR – LEAer
JUSTIFIQUE TODAS AS RESPOSTAS

1. (2.0) Seja A matriz 3×3 tal que $\det(A) = -2$. Encontre as soluções matriciais X da equação
$$\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\det(-A) & 2\\ 0 & \det(2A^{-1})\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}8 & 2\\ 0 & -1\end{bmatrix}^{2} X = \begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}\det\left(\det(2A^T)\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 2\end{bmatrix}^T\right)\begin{bmatrix}3 & -3\\ 3 & -3\end{bmatrix}^3.$$

2. (2.0) Seja $A = \begin{bmatrix}7 & 2 & 1 & 2\\ 3 & 4 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 2 & 1\end{bmatrix}$. Verifique se A é invertível e, nesse caso, calcule $(A^{-1})_{(4,1)}$.

3. Considere o subespaço linear $V = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x+y=0 \text{ e } z+w=0\}$ de $\mathbb{R}^4$.
   (a) (2.0) Determine uma base para $V+V$.
   (b) (2.0) Usando o produto interno usual, calcule a distância entre $(1,1,1,1)$ e $V^\perp$.

4. Seja $T : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2$ a transformação linear cuja representação matricial é
$$M(T;\mathcal{B}_1;\mathcal{B}_2)=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0\\ -2 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \text{ onde } \mathcal{B}_1=\left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\right\} \text{ e } \mathcal{B}_2=\{1+t, 1-t, t^2\}.$$
   (a) (2.0) Encontre as coordenadas de $\begin{bmatrix}3 & 3\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ na base $\mathcal{B}_1$.
   (b) (2.0) Calcule $T\left(\begin{bmatrix}3 & 3\\ 1 & 1\end{bmatrix}\right)$ e verifique se T é sobrejectiva.
   (c) (1.0) Verifique se o núcleo $\mathcal{N}(T)$ e o contradomínio $\mathcal{I}(T)$ são espaços lineares isomorfos.

5. (2.0) Encontre uma decomposição em valores singulares (SVD) da matriz $A = \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

6. (1.0) Seja $B=U\Sigma V^T$ uma decomposição SVD de B. Encontre uma decomposição SVD para cB, onde $c \in \mathbb{R}$.

7. (1.0) Classifique a forma quadrática $Q(x,y,z)=[x\ y\ z]A^TA\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}$ onde $A\in\mathcal{M}_{4\times 3}(\mathbb{R})$ e $L(\{(1,2,3,4)\})=\mathcal{N}(A^T)$.

8. (1.0) Seja S matriz 3×3 real e invertível e $\{A_1, ..., A_6\}$ uma base de $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$. Verifique se $\{A_1S, ..., A_6S\}$ é uma base de $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$.

9. (2.0) Sejam A e B matrizes $n\times n$ reais e normais tais que $\mathcal{C}(A) \subset \mathcal{C}(B)^\perp$. Mostre que $A+B$ é normal.

FIM