Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

1º Semestre 2022/2023
26 de Janeiro de 2023
(duração 60 minutos)

EXAME DE 1ª ÉPOCA DE ÁLGEBRA LINEAR – LEAer

JUSTIFIQUE TODAS AS RESPOSTAS

1. Seja $T : \mathcal{P}_2 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear cuja representação matricial é

$$M(T;\mathcal{B}_1;\mathcal{B}_2) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ onde } \mathcal{B}_1 = \{1+t,\ 1-t,\ 1+t+t^2\} \text{ e } \mathcal{B}_2 = \{(1,0,0),(0,1,1),(0,1,-1)\}.$$

   (a) (4.0) Calcule $T(2+2t+t^2)$.

   (b) (3.0) Calcule a distância entre $(0,2,0)$ e o contradomínio $\mathcal{I}(T)$, usando o produto interno usual.

   (c) (3.0) Resolva, em $\mathcal{P}_2$, a equação linear $T(p(t)) = (-3,1,-1)$.

   (d) (1.0) Verifique se $\mathcal{I}(T)$ e $\mathcal{P}_1$ são espaços lineares isomorfos.

2. (4.0) Encontre uma decomposição em valores singulares (SVD) da matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

3. (1.0) Seja $k \in \mathbb{R}$ e considere a transformação linear $T : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ tal que $T(p(t)) = p(2t+k)$ com $p(t) \in \mathcal{P}$. Caso exista, determine k de forma a que $p(t) = 3t-1$ seja vector próprio de T.

4. (2.0) Seja $A \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ não nula. Classifique a seguinte forma quadrática $Q(x,y,z) = [x\ y\ z]\ A^T A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$. Verifique se $Q(x,y,z) \geq Q(1,2,3)$ para qualquer $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ se $(1,2,3) \in \mathcal{L}(A)^\perp$.

5. (2.0) Sejam $A, P \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ onde A é simétrica e P definida positiva. Mostre que PA é diagonalizável.

FIM