Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

1º Semestre 2021/2022
23 de Fevereiro de 2022
(duração 120 minutos)

RESOLUÇÃO DO 2º EXAME DE ÁLGEBRA LINEAR

Cursos: LEAer

1. O conjunto solução de $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right]$ é $\{((1-y,y,1,w)\in\mathbb{R}^4 : y,w\in\mathbb{R}\}$, portanto $\alpha=1$ e $\beta\neq 0$.

2. Seja $X=[a\ \ b]$. O lado direita da equação é $\begin{bmatrix}0 & 0\end{bmatrix}$, como $\begin{bmatrix}1 & \det(A^{-1}) \\ 0 & 2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1 & 2\\1 & 2\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}2 & \frac{1}{2}\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 10\\2 & 4\end{bmatrix}$, concluimos que $X=[-2b\ \ 5b]$ onde $b\in\mathbb{R}$.

3. Como $A^{-1}=\frac{1}{|A|}\mathrm{cof}(A)^T$, pelo que $(A^{-1})_{(1,2)}=0$. (Note-se que $|\mathrm{cof}(A)|=1$ e como $A\,\mathrm{cof}(A)^T=|A|I$, temos $|A|\ |\mathrm{cof}(A)|=|A|^4$, isto é, $|A|=\sqrt[3]{1}=1$.)

4. (a) Como $\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 1\\1 & 1 & 2 & 1\\2 & 1 & 3 & 1\\0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 1\\0 & 1 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$, $\left\{\begin{bmatrix}1 & 1\\2 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}\right\}$ é uma base de $V\cap V=V$.

   (b) Por a), $\dim(V)=3$, temos que escolher um subespaço U com $\dim(U)=3$, p.ex. $U=L(\{1,t,t^3\})$.

5. (a) $T(2+t+t^3)=T(1+t)+T(1+t^3)=1(1,0,0)+2(0,1,1)+(0,0,0)=(1,2,2)$; T não é bijectiva pois não é injectiva ($\dim\mathcal{N}(T)\neq 0$). (Obs: também não é sobrejectiva)

   (b) $\{(1,2,-2),(1,2,0)\}$ é uma base de $\mathcal{N}(A)$ pelo que $\{(1,-2,2),(1,2,2)\}$ é uma base de $\mathcal{I}(T)$. Como $\{(2,0,-1)\}$ é uma base de $\mathcal{I}(T)^\perp$, temos $\mathrm{d}((1,2,0,\mathcal{I}(T))=||\mathrm{proj}_{2,0,-1)}(1,2,0)||=\frac{2\sqrt{5}}{3}$.

6. $A^TA=\begin{bmatrix}2 & 4 & 0\\4 & 8 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ cujos valores próprios são 10 e 0. Temos $\{(1,2,0)\}$ é uma base de $E(10)$ e $\{(0,0,1),(2,-1,0)\}$ é uma base (ortog.) de $E(0)$. Assim $V=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{5}}{5} & 0 & \frac{2\sqrt{5}}{5}\\ \frac{2\sqrt{5}}{5} & 0 & \frac{-\sqrt{5}}{5}\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$. Se $\sigma_1=\frac{\sqrt{10}}{10}$, $u_1=\frac{1}{\sigma_1}Av_1=\frac{\sqrt{10}}{10}\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\1 & 2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{5}}{5}\\ \frac{2\sqrt{5}}{5}\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{5}\\ \frac{2\sqrt{2}}{5}\\ 0\end{bmatrix}$.
   Por outro lado $\{(1,-1)\}$ é uma base (ortog.) de $\mathcal{N}(A^T)$, pelo que temos a decomposição SVD:
$$A=U\Sigma V^T=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{2\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{10} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{5}}{5} & 0 & \frac{2\sqrt{5}}{5}\\ \frac{2\sqrt{5}}{5} & 0 & \frac{-\sqrt{5}}{5}\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}^T$$

7. Eme geral não coincidem; note λ valor próprio de A sse $\lambda+c$ valor próprio de $A+cI$ pois $|A-\lambda I|=|(A+cI)-(\lambda+c)I$. Finalmente A diagonalizável sse $A+cI$ diagonalizável pois se $A=SDS^{-1}$, então $A+cI=S(D+cI)S^{-1}$ e, reciprocamente, se $A+cI=S\Delta S^{-1}$, então $A=S(\Delta-cI)S^{-1}$ (onde D e Δ são matrizes diagonais).

8. Note-se que $B=A+100I$ onde $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\2 & 2 & 2 & 2\\3 & 3 & 3 & 3\\4 & 4 & 4 & 4\end{bmatrix}$ e B é a matriz do enunciado. Como $\mathrm{car}(A)=1$ e $\mathrm{tr}(A)=10$, $p_A(\lambda)=\lambda^3(\lambda-10)$. Por 7), $p_B(\lambda)=(\lambda-100)^3(\lambda-110)$.

9. As colunas de Q têm de ser uma base $\{w_1,...,w_n\}$ o.n. de $\mathbb{R}^n$ e para R ser triangular superior, a coluna u_k de A tem de ser combinação linear de $w_1,....,w_k$ (com $k\in\{1,...,n\}$).

   Podemos aplicar às colunas $\{u_1,...,u_n\}$ de A o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt e obter uma base ortogonal $\{v_1,...,v_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ (pois A é invertível). Por construção, cada u_k é combinação linear dos primeiros k vectores desta base ortogonal. Normalizando os v_i's obtém-se uma base o.n. $\{w_1,...,w_n\}$ de $\mathbb{R}^n$. Temos assim que se as colunas de Q forem os w_i's e se R for a matriz tal que $(R)_{(i,j)}=\langle u_i,w_j\rangle$ se $i\geq j$ e $(R)_{(i,j)}=0$ caso contrário, temos o pretendido $A=QR$.