Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

1º Semestre 2021/2022
14 de Fevereiro de 2022
(duração 120 minutos)

RESOLUÇÃO DO 1º EXAME DE ÁLGEBRA LINEAR

Cursos: LEAer

1. (a) Como A é invertível (logo $\mathcal{N}(A)=\{(0,0,0)\}$), $Ax=b$ é determinado tendo-se $\mathcal{S}=\{(0,0,1)\}$.

   (b) Como $\det(-A^TA^{-1})=(-1)^3\det(A^T)\det(A^{-1})=-1$, $\det\begin{bmatrix} 0 & 2p & s & s+t \\ \det(-A^TA^{-1}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2q & -3 & 4 \\ 0 & 2r & 1 & 3 \end{bmatrix} \underset{\text{Laplace}}{=}$
   $-\det(-A^TA^{-1})\det\begin{bmatrix} 2p & s & s+t \\ 2q & -3 & 4 \\ 2r & 1 & 3 \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 2p & 2q & 2r \\ s & -3 & 1 \\ s+t & 4 & 3 \end{bmatrix} \underset{\frac{1}{2}L_1\to L_1,\ -L_2+L_3\to L_3}{=} 2\det\begin{bmatrix} p & q & r \\ s & -3 & 1 \\ t & 7 & 2 \end{bmatrix} = 4.$

2. (a) Como $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\{1+t+2t^2, t+t^2, 1+t+t^2+t^3\}$ é uma base de $V+V=V$.

   (b) Usando (a), $\dim(V)=3$, temos então que exibir uma matriz A tal que $\dim(\mathcal{N}(A))=3$. Por exemplo $A=[0\ 0\ 0]$ (podemos considerar qualquer matriz A tal que $\dim(\mathcal{N}(A))=3$).

3. (a) $T(1,1,-1)=T(1,0,0)+T(0,1,-1)=1(1)-2(1+t^2)+0=-1-2t^2$ (T não é injectiva pois $\dim(\mathcal{N}(T))=1\neq 0$).

   (b) $\{(0,0,1)\}$ é uma base de $\mathcal{N}(A)$ pelo que $\{(0,1,-1)\}$ é uma base de $\mathcal{N}(T)$. Como $(1,0,0)\perp\mathcal{N}(T)$, $d((1,0,0),\mathcal{N}(T))=||(1,0,0)||=1$.

4. $A^TA=\begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$ cujos valores próprios são 10 e 0. Temos $\{(1,1)\}$ é uma base de $E(10)$ e $\{(1,-1)\}$ é uma base de $E(0)$. Assim $V=\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$. Em seguida calculamos $u_1=\frac{1}{\sigma_1}Av_1=\frac{\sqrt{10}}{10}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ 0 \end{bmatrix}$. Por outro lado $\{(2,-1,0),(0,0,1)\}$ é uma base (ortogonal) de $\mathcal{N}(A^T)$, pelo que temos a decomposição SVD:

$$A=U\Sigma V^T=\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5} & 0 \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} & -\frac{\sqrt{5}}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{10} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}^T$$

5. Temos que calcular os valores próprios da matriz simétrica associada, que tem dois blocos 2×2 iguais (não nulos) à matriz $K=\begin{bmatrix} 1 & \frac{a}{2} \\ \frac{a}{2} & 1 \end{bmatrix}$. A classificação da forma quadrática coincide com a classificação de K. Ora,

$$\det(K)=\frac{4-a^2}{4} \quad \text{e} \quad \text{tr}(K)=2.$$

   Logo Q é indefinida sse $|a|>2$ ($\det(K)<0$), definida positiva sse $|a|<2$ ($\det(K)>0$ e $\text{tr}K)>0$) e semidefinida positiva sse $a=\pm 2$.

6. Caso exista tal matriz C, λ=0 é o único valor próprio de C pois $C^3=0$. Como $C^2\neq 0$, C não pode ser diagonalizável. Sendo não diagonalizável, pelo teorema da forma canónica de Jordan, existe S invertível tal que $C=SJS^{-1}$ com $J=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Como $J^2=0$, então $C^2=SJ^2S^{-1}=0$. Portanto, não existe tal matriz C.

7. Em geral, $\mathcal{C}(A^TA)\neq\mathcal{C}(A)$. Por exemplo, se $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A^TA=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ pelo que $\mathcal{C}(A)=L(\{(1,0\})$ enquanto que $\mathcal{C}(A^T)=L(\{(0,1\})$.

8. Seja $A=U\Sigma V^T$ uma decomposição SVD de A. Assim $A^TA=V\Sigma^T\Sigma V^T=V\Sigma^2V^T$ pelo que A^TA é semelhante a Σ^2. Analogamente $AA^T=U\Sigma^2U^T$ pelo que AA^T é semelhante a Σ^2. Logo A^TA e AA^T são semelhantes.