Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

1º Semestre 2021/2022
23 de Fevereiro de 2022
(duração 120 minutos)

EXAME DE 2ª ÉPOCA ÁLGEBRA LINEAR

Curso: LEAer

1. (2.0) Identifique os valores de α e β para os quais $\{(1-\alpha y, y, 1, \beta w) \in \mathbb{R}^4 : y, w \in \mathbb{R}\}$ seja o conjunto solução do sistema de equações lineares cuja matriz aumentada é $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right]$.

2. (2.0) Seja A matriz 5×5 tal que $\det(A) = -2$. Encontre as soluções X da equação matricial
$$X \begin{bmatrix} 1 & \det(A^{-1}) \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix} \det\left(\det(A^T) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}^2.$$

3. (2.0) Seja A tal que $\operatorname{cof}(A) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Calcule $\det(A)$ e $(A^{-1})_{(1,2)}$.

4. Considere o subespaço linear $V = L\left(\left\{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right\}\right)$ de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.
   (a) (2.0) Determine uma base para $V \cap V$.
   (b) (1.0) Encontre um subespaço linear U de $\mathcal{P}_4$ tal que U seja isomorfo a V.

5. Seja $T : \mathcal{P}_3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear cuja representação matricial é
$$M(T; \mathcal{B}_1; \mathcal{B}_2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ onde } \mathcal{B}_1 = \{1, 1+t, 1+t^2, 1+t^3\} \text{ e } \mathcal{B}_2 = \{(1,0,0), (0,1,1), (0,1,-1)\}.$$
   (a) (2.0) Calcule $T(2 + t + t^3)$ e verifique se T é bijectiva.
   (b) (2.0) Usando o produto interno usual, calcule a distância entre $(1, 2, 0)$ e $\mathcal{I}(T)$.

6. (3.0) Encontre uma decomposição em valores singulares (SVD) da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

7. (1.0) Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ e c escalar. Verifique se os valores próprios de A e de $A + cI$ coincidem. Encontre os valores de c tais que: $A + cI$ diagonalizável se e só se A diagonalizável (caso existam).

8. (1.0) Determine o polinómio característico de $\begin{bmatrix} 101 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 102 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 103 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 104 \end{bmatrix}$.

9. (2.0) Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ invertível. Mostre que existem Q ortogonal e R triangular superior tais $A = QR$.

FIM