Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

1º Semestre 2021/2022
14 de Fevereiro de 2022
(duração 120 minutos)

EXAME DE 1ª ÉPOCA ÁLGEBRA LINEAR

Curso: LEAer

1. Seja $A = \begin{bmatrix} p & q & r \\ s & -3 & 1 \\ t & 7 & 2 \end{bmatrix}$ tal que $\det(A) = 2$.

   (a) (2.0) Encontre o conjunto solução $\mathcal{S}$ do sistema linear $A\mathbf{x} = b$ sabendo que $(0,0,1) \in \mathcal{S}$.

   (b) (2.0) Calcule $\det \begin{bmatrix} 0 & 2p & s & s+t \\ \det(-A^T A^{-1}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2q & -3 & 4 \\ 0 & 2r & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

2. Considere o subespaço linear V de $\mathcal{P}_3$ tal que $V = L(\{1+t+2t^2, t+t^2, 1+2t+3t^2, 1+t+t^2+t^3\})$.

   (a) (2.0) Determine uma base para $V+V$.

   (b) (1.0) Encontre uma matriz A tal que V é isomorfo a $\mathcal{N}(A)$.

3. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathcal{P}_2$ a transformação linear cuja representação matricial é

$$M(T;\mathcal{B}_1;\mathcal{B}_2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ onde } \mathcal{B}_1 = \{(1,0,0),(0,1,1),(0,1,-1)\} \text{ e } \mathcal{B}_2 = \{1, 1+t, 1+t^2\}.$$

   (a) (2.0) Calcule $T(1,1,-1)$ e verifique se T é injectiva.

   (b) (2.0) Usando o produto interno usual, calcule a distância entre $(1,0,0)$ e $\mathcal{N}(T)$.

4. (3.0) Encontre uma decomposição em valores singulares (SVD) da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

5. (2.0) Classifique a forma quadrática $Q(x,y,z,w) = [x\ y\ z\ w] \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{a} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{a} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}$ em função de $\mathbf{a} \in \mathbb{R}$.

6. (1.0) Encontre $C \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tal que $C^2 \neq \mathbf{0}$ e $C^3 = \mathbf{0}$ (caso exista).

7. (1.0) Verifique se $\mathcal{C}(B^T B) = \mathcal{C}(B)$, para qualquer $B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

8. (2.0) Mostre que AA^T e $A^T A$ são matrizes semelhantes, para qualquer $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

FIM