Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

1º Semestre 2019/2020
14 de dezembro de 2019
Duração: 90 minutos

3^o TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR

MEBiol - MEBiom

1. Para cada $\mathbf{a} \in \mathbb{R}$ seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \mathbf{a} \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & \mathbf{a} \end{bmatrix}$.

   (a) (1.0) Calcule o polinómio característico de A.

   (b) (1.0) Determine os valores de $\mathbf{a}$ para os quais A é diagonalizável.

   (c) (1.0) Para $\mathbf{a} = 2$, encontre (se possível) uma matriz diagonal D e uma matriz S invertível tais que $D = S^{-1}AS$.

2. Considere a base ordenada $\mathcal{B}_1 = \{p_1, p_2\}$ do subespaço linear V de $\mathcal{P}_2$ tais que $p_1(t) = 1 + t,\ p_2(t) = t + t^2$ e a transformação linear $T : V \to \mathcal{P}_2$ tal que

$$T(p_1) = 2p_1 \quad \text{e} \quad T(p_2) = p_1.$$

   (a) (1.0) Determine a representação matricial $M(T; \mathcal{B}_1; Bc)$ onde Bc é a base canónica de $\mathcal{P}_2$.

   (b) (1.0) Verifique se T é injectiva ou sobrejectiva.

   (c) (1.0) Seja $R : V \to V$ a transformação linear tal que $M(R; \mathcal{B}_1; \mathcal{B}_1) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Calcule $R(p_2(t))$ e resolva, em V, a equação linear $(T \circ R)(p(t)) = 4 + 4t$.

3. Seja $U = L(\{(1, 0, 0)\})$ e considere $\mathbb{R}^3$ munido com o seguinte produto interno:

$$\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 4x_2y_2 + 2x_3y_3.$$

   (a) (1.0) Encontre uma base para $U^{\perp}$.

   (b) (1.0) Calcule a distância $d((-1, 1, 0), U)$ entre $(-1, 1, 0)$ e U.

4. (1.0) Construa (se possível) uma matriz real simétrica A tal que $\lambda_1{=}3$ e $\lambda_2{=}{-5}$ são valores próprios de A e, além disso, $(1, 1, 0)$ e $(1, 0, 0)$ são vectores próprios de A associados ao valor próprio λ_1.

5. (1.0) Seja A matriz $n \times n$. Mostre que A é normal se e só se $A^*{=}AU$ para alguma matriz unitária U.

FIM