RESOLUÇÃO DO TESTE 3 DE ÁLGEBRA LINEAR

MEBiol - MEBiom

1. (a) $p(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & \mathbf{a} \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 1 & 2 & \mathbf{a}-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} 1-\lambda & \mathbf{a} \\ 1 & \mathbf{a}-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^2(\lambda - 1 - a)$.

   (b) Temos $mg(0) = 2$ para todo a, pelo que se $a+1=0$, $ma(0)=3$ e portanto A não é diagonalizável (para $a=-1$). Para $a \neq -1$, temos dois valores próprios distintos: 0 e $1+a$, cujas mg's são 2 e 1, respectivamente, pelo que nestes casos, A é diagonalizável.

   (b) $\{(-2,1,0),(-2,0,1)\}$ é uma base de $\mathcal{N}(A)$, enquanto que $\{(1,0,1)\}$ é uma base de $\mathcal{N}(A-3I)$. Portanto $D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ e $S = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ satisfazem $D = S^{-1}AS$.

2. (a) Como $T(p_1) = 2 + 2t + 0t^3$ e $T(p_2) = 1 + 1t + 0t^3$, $A = M(T; \mathcal{B}_1; Bc) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

   (b) Como $\text{car}(A) = 1$, $\dim(\mathcal{N}(T)) = 1$ portanto T não é injectiva. Como $\text{car}(A) \neq$dim(Esp. Chegada), T não é sobrejectiva.
   (c) $R(p_2) = 2p_1$. Como $(T \circ R)(p_2) = T(2p_1) = 4p_1$, p_2 é solução particular da equação linear. Por outro lado, como

$$M(T \circ R; \mathcal{B}_1; Bc) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   e $\{(4,-3)\}$ é uma base do núcleo desta matriz, podemos concluir que $4p_1 - 3p_2 = 4 + t - 3t^2$ é uma base de $\mathcal{N}(T \circ R)$. Logo

$$\{p(t) \in V : (T \circ R)(p(t)) = 2 + 2t\} = p_2 + \mathcal{N}(T \circ R) = \{t + t^2 + \alpha(4 + t - 3t^2) : \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

3. (a) $U^\perp = \{(x,y,z) : \langle (x,y,z),(1,0,0)\rangle = 0\} = \{(x,y,z) : x+y=0\}$, pelo que $\{(-1,1,0),(0,0,1)\}$ é uma base de $U^\perp$.
   (b) $d((-1,1,0),U) = ||P_{U^\perp}(-1,1,0)|| = ||(-1,1,0) - P_U(-1,1,0)|| \underset{(-1,1,0)\in U^\perp}{=} ||(-1,1,0)|| = \sqrt{3}$.

4. Tal matriz A simétrica terá que ser 3×3 e $\text{mg}(\lambda_1) \geq 2$. Vamos construir Q ortogonal (i.e. colunas de Q^T é uma base o.n. de $\mathbb{R}^3$) e D diagonal (real) tais que $A = Q^T DQ$. Ora $\{(1,0,0),(0,1,0)\}$ é uma base o.n. de $E(\lambda_1)$. Como os vectores de $E(\lambda_2)$ (que tem necessariamente dimensão 1) têm de ser ortogonais aos de $E(\lambda_1)$, $\{(0,0,1)\}$ é uma base o.n. de $E(\lambda_2)$. Portanto

$$A = Q^T DQ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}.$$

5. Se $A^* = AU$ para alguma matriz unitária U, então $A = U^* A^*$, pelo que $UA = A^*$ (logo U comuta com A). Portanto

$$AA^* = A(AU) = A(UA) = (AU)A = A^*A$$

   pelo que A é normal. Reciprocamente, se A é normal, então existe uma matriz unitária V e matriz diagonal D tais que $A = V^*DV$. Reordenando os valores próprios, podemos assumir que $D = \left[\begin{array}{c|c} \Delta & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$ em que Δ tem os valores própios de A não nulos. Como $U := V \left[\begin{array}{c|c} \Delta^*\Delta^{-1} & 0 \\ \hline 0 & I \end{array}\right] V^*$ é unitária temos $A^* = AU$ pois:

$$A^* = V^*DV = (V \left[\begin{array}{c|c} \Delta & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] V^*)(V \left[\begin{array}{c|c} \Delta^{-1}\Delta^* & 0 \\ \hline 0 & I \end{array}\right] V^*) = AU.$$