RESOLUÇÃO DO TESTE 2 DE ÁLGEBRA LINEAR

MEBiol - MEBiom

1. Usando operações elementares temos: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ -2 & -4 & -3 & -4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

   (a) Portanto $\dim(\mathcal{C}(A)) = \text{car}(A) = 2$ e $\{(1,2,-2),(3,6,-3)\}$ é uma base de $\mathcal{C}(A)$.

   (b) Como

$$\begin{aligned} V_1 \cap V_2 &= \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \{(x,y,z,w) : x+2y+3z+4w = 3z+4w = w = 0\} \\ &= \{(-2y, y, 0, 0) : y \in \mathbb{R}\}, \end{aligned}$$

   $\{(-2,1,0,0)\}$ é uma base de $V_1 \cap V_2$.

   Sabemos que $\dim(V_1) = 3$, $\dim(V_2) = 2$ e $\dim(V_1 \cap V_2) = 1$, pelo que, pelo teorema das dimensões,

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim(V_1) + \dim(V_2) - \dim(V_1 \cap V_2) = 3 + 2 - 1 = 4.$$

2. (a) Por um lado, $(1,3)$ são as coordenadas de $q_1 + 3q_2$ na base $\mathcal{B}_2$ e, por outro, $(1,0)$ são as coordendas de $q_1 + 3q_2$ em $\mathcal{B}_1$ porque

$$S_{\mathcal{B}_2 \to \mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

   Logo $q_1 + 3q_2 = 1p_1 + 0p_2 = p_1$, i.e. $p_1(t) = 1 + t$.

   (b) Não é igual pois, p.ex., $p_1 \notin \{p : p(1) + p(-1) = 0\}$ porque $p_1(1) + p_1(-1) = 2 + 0 = 2 \neq 0$.

3. Sejam $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ escalares tais que $\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \alpha_3 w_3 = 0$. Logo

$$\alpha_1(v_2 - v_1) + \alpha_2(kv_3 - v_2) + \alpha_3(v_1 - v_3) = (-\alpha_1 + \alpha_3)v_1 + (\alpha_1 - \alpha_2)v_2 + (k\alpha_2 - \alpha_3)v_3 = 0.$$

   Pela independência linear de v_1, v_2, v_3 temos que ter $-\alpha_1 + \alpha_3 = \alpha_1 - \alpha_2 = k\alpha_2 - \alpha_3 = 0$. Usando operações elementares:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & k & -1 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & k & -1 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k-1 & 0 \end{array}\right]$$

   pelo que w_1, w_2, w_3 são linearmente independentes sse $k \neq 1$. Para $k = 1$, podemos verificar (usando as contas anteriores) que w_1, w_2 são linearmente independentes. Portanto $\dim(L(\{w_1, w_2, w_3\})) = 3$ para $k \neq 1$ e $\dim(L(\{w_1, w_2, w_3\})) = 2$ para $k = 1$.

4. Seja $u \in \mathcal{N}(A) \cap \mathcal{N}(B)$, Então $Au = 0 = Bu$, pelo que $(A + B)(u) = 0$ portanto $u \in \mathcal{N}(A + B)$. Reciprocamente, seja $u \in \mathcal{N}(A + B)$. Então $(A + B)u = 0$, pelo que $Au = -Bu \in \mathcal{C}(A) \cap \mathcal{C}(B)$. Mas, por hipótese, $\mathcal{C}(A) \cap \mathcal{C}(B) = \{0\}$, pelo que $Au = 0$ e $-Bu = 0$. Portanto $u \in \mathcal{N}(A) \cap \mathcal{N}(B)$.