Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

1^o Semestre 2019/2020
14 de novembro de 2019
Duração: 45 minutos

2^o TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR
MEBiol - MEBiom

1. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ -2 & -4 & -3 & -4 \end{bmatrix}$.

   (a) (1.0) Determine a dimensão e uma base para o espaço das colunas $\mathcal{C}(A)$ de A.

   (b) (1.0) Determine uma base para $V_1 \cap V_2$ e calcule $\dim(V_1 + V_2)$ onde $V_1 = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : w = 0\}$ e $V_2 = \mathcal{N}(A)$.

2. Considere as bases ordenadas $\mathcal{B}_1 = \{p_1, p_2\}$ e $\mathcal{B}_2 = \{q_1, q_2\}$ do subespaço linear V de $\mathcal{P}_2$ tais que $p_1(t) = 1 + t,\ p_2(t) = t + t^2$ e a matriz de mudança de base seja

$$S_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}.$$

   (a) (1.0) Determine o polinómio $q_1 + 3q_2$.

   (b) (0.5) Verifique se $V = \{p \in \mathcal{P}_2 : p(1) + p(-1) = 0\}$.

3. (1.0) Sejam v_1, v_2, v_3 vectores linearmente independentes num espaço linear real V. Para cada $\mathbf{k} \in \mathbb{R}$, seja $w_1 = v_2 - v_1,\ w_2 = \mathbf{k}v_3 - v_2$ e $w_3 = v_1 - v_3$. Para cada $\mathbf{k}$, calcule $\dim(L(\{w_1, w_2, w_3\}))$.

4. (0.5) Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tais que $\mathcal{C}(A) \cap \mathcal{C}(B) = \{0\}$. Mostre que $\mathcal{N}(A + B) = \mathcal{N}(A) \cap \mathcal{N}(B)$.

FIM