Ano Lectivo 2019/2020
17 de Outubro de 2019
Duração: 45 minutos

RESOLUÇÃO DO TESTE 1 DE ÁLGEBRA LINEAR

MEBiol - MEBiom

1. (a) O equilibrio da reação química é dado pelo sistema de equações lineares $\begin{cases} x - 6z = 0 & \text{(Carbono)} \\ 2x + y - 6z - 2w = 0 & \text{(Oxigénio)} \\ 2y - 12z = 0 & \text{(Hidrogénio)} \end{cases}$ cuja matriz aumentada é $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -6 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -6 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -12 & 0 & 0 \end{array}\right]$.

   (b) Usando operações elementares temos $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -6 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -6 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -12 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{-2L_1+L_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -12 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{-2L_2+L_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -24 & 4 & 0 \end{array}\right]$. Escolhendo w para variável livre, o conjunto solução é $\mathcal{S} = \{(w, w, \frac{1}{6}w, w) \in \mathbb{R}^4 : w \in \mathbb{R}\}$. Para $w = 6$, $(6, 6, 1, 6)$ é a solução com os *menores* inteiros.

2. Temos $\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} A^T + 2 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right)^T = A \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $\mathrm{tr}(\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}) = \mathrm{tr}(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}) = 2$, logo a equação do enunciado é equivalente a $A(\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} - I) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Como $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} - I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ é invertível, $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ é a única solução.

3. Usando a fórmula de Laplace na coluna 3, temos $\det A = -3 \det \begin{bmatrix} 7 & 5 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \\ 9 & 8 & 2 \end{bmatrix} = -6 \det \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} = 24 \neq 0$ portanto A é invertível. Além disso, $((A^T)^{-1})_{(4,1)} = (A^{-1})_{(1,4)} = \frac{(-1)^{4+1} \det A_{41}}{\det A} = \frac{-\det \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}}{24} = 0$.

4. $\det \begin{bmatrix} 5g & 5h & 5i \\ d & e & f \\ 3a+9d & 3b+9e & 3c+9f \end{bmatrix} \underset{-9\mathrm{L}_2+\mathrm{L}_3}{=} \det \begin{bmatrix} 5g & 5h & 5i \\ d & e & f \\ 3a & 3b & 3c \end{bmatrix} \underset{\substack{\frac{1}{5}\mathrm{L}_1 \\ \frac{1}{3}\mathrm{L}_3}}{=} 15 \det \begin{bmatrix} g & h & i \\ d & e & f \\ a & b & c \end{bmatrix} \underset{\mathrm{L}_1 \leftrightarrow \mathrm{L}_2}{=}$

   $= -15 \det \begin{bmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{bmatrix} \underset{\substack{\text{Laplace} \\ \text{na linha 1}}}{=} \frac{15}{7} \det \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 7 \\ a & b & c & 6 \\ d & e & f & 5 \\ g & h & i & 4 \end{bmatrix} = \frac{15 \times 18}{7} = \frac{270}{7}$.

5. Operações elementares não alteram o característica da matriz. Portanto vamos provar que podemos tansformar AB em B usando operações elementares. Por outro lado, transformar AB numa matriz C usando uma operação elementar (nas linhas de AB) equivale a dizer que $E_1(AB) = C$ onde E_1 é a matriz elementar associada a essa operação elementar. Portanto, pretendemos justificar que existem matrizes elementares $E_1, ..., E_p$ (para algum p) tais que

   $$E_p...E_2E_1(AB) = B.$$

   Mas tal é possível, pois como A é invertível, A^{-1} existe e é o produto de matrizes elementares $A^{-1} = E_p...E_2E_1$.