RESOLUÇÃO DO TESTE DE RECUPEÇÃO DE ÁLGEBRA LINEAR

MEBiol - MEBiom

I (T1+T2 - 10 valores - 90 minutos)

1. (a) Sendo X a matriz da mensagem original e Y a matriz da mensagem codificada temos

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&3\\0&1&0\\1&0&4\end{bmatrix}\text{(matriz de descodificação)}\quad\text{e}\quad X=A^{-1}Y=\begin{bmatrix}1&0&3\\0&1&0\\1&0&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}10&-11&56\\1&2&19\\2&4&-14\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}16&1&14\\1&2&19\\18&5&0\end{bmatrix}$$

pelo que X em sequencia é: $16,1,18,1,2,5,14,19,0$. Usando a tabela obtém-se o texto: `PARABENS` .

(b) Usando operações elementares temos

$$\begin{bmatrix}4&0&-3\\0&1&0\\-1&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow[P_{13}]{L_1\leftrightarrow L_3}\begin{bmatrix}-1&0&1\\0&1&0\\4&0&-3\end{bmatrix}\xrightarrow[E_{12}(4)]{4L_1+L_2}\begin{bmatrix}-1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow[E_{31}(-1)]{-L_3+L_1}\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow[E_1(-1)]{-L_1}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

Portanto $A=P_{13}E_{12}(-4)E_{31}(+1)E_1(-1)$.

2. Como $\det\begin{bmatrix}2&-1&0\\1&-1&3\\0&-1&-2\end{bmatrix}=8$, a equação é equivalente a $2A=\frac{8}{\sqrt[3]{2}^3}A\begin{bmatrix}2&0\\1&-1\end{bmatrix}$, isto é,

$A\left(2I-4\begin{bmatrix}2&0\\1&-1\end{bmatrix}\right)=0$. Como $2I-4\begin{bmatrix}2&0\\1&-1\end{bmatrix}$ é invertível, $A=0$ é a única solução.

3. $$\begin{vmatrix}a&b&c&6\\d&e&f&5\\g&h&i&4\\0&0&0&4\end{vmatrix}\underset{\text{Laplace}}{=}4\begin{vmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{vmatrix}\underset{\substack{3L_1\\-5L_3}}{=}\frac{4}{3(-5)}\begin{vmatrix}3a&3b&3c\\d&e&f\\-5g&-5h&-5i\end{vmatrix}\underset{L_1\leftrightarrow L_3}{=}-\frac{4}{3(-5)}\begin{vmatrix}-5g&-5h&-5i\\d&e&f\\3a&3b&3c\end{vmatrix}\underset{9L_2+L_3}{=}-\frac{4}{3(-5)}\begin{vmatrix}-5g&-5h&-5i\\d&e&f\\3a+9d&3b+9e&3c+9f\end{vmatrix}=\frac{4}{15}.$$

4. (a) Seja $p(t)=a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3\in\mathcal{P}_3$. Como $p(0)=a_0$ e $-p(-1)=-a_0+a_1-a_2+a_3$, $p\in V_1$ sse $a_0=0, a_1-a_2+a_3=0$ sse $p(t)=(a_2-a_3)t+a_2t^2+a_3t^3=a_2(t+t^2)+a_3(-t+t^3)$, pelo que $\{t+t^2,-t+t^3\}$ é uma base de V_1.

(b) $\dim(V_1+V_2)=\dim L(\{t+t^2,-t+t^3,t+t^2,t+t^3,2t+t^2+t^3\})=\dim L(\{t+t^2,-t+t^3,t+t^3\})=\text{car}\begin{bmatrix}0&1&1&0\\0&-1&0&1\\0&1&0&1\end{bmatrix}=3.$

(c) Colocando os coeficientes da base de V_1 obtida em a) e a base canónica de $\mathcal{P}_3$ em coluna e usando el. Gauss temos:

$$\begin{bmatrix}0&0&1&0&0&0\\1&-1&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&0\\1&1&0&0&0&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&0&1&0&0\\0&-2&0&0&0&1\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1&0\end{bmatrix}$$ pelo que $\{t+t^3,-t+t^3,\mathbf{1},\mathbf{t^2}\}$ é uma tal base.

(d) $\mathcal{B}=\{t+t^2,t+t^3\}$ é uma base de V_2, queremos a,b tais que $-t+2t^2-3t^3=a(t+t^2)+b(t+t^3)$. Claro que $a=2$ e $b=-3$, pelo que as coordenadas de $-t+2t^2-3t^3$ em $\mathcal{B}$ são $(2,-3)$.

5. (a) $0\in V$ pois $A0=0$. Se $u_1,u_2\in V$ então existem k_1,k_2 tais que $A^{k_1}u_1=0$ e $A^{k_2}u_2=0$. Para ver que $u_1+u_2\in V$ temos que encontrar k tal que $A^k(u_1+u_2)=0$. Ora podemos considerar $k=k_1+k_2$ pois

$$A^{k_1+k_2}(u_1+u_2)=A^{k_2}(A^{k_1}u_1)+A^{k_1}(A^{k_2}u_2)=A^{k_2}0+A^{k_1}0=0.$$

Como $A^ku=0$ implica $A^k(\alpha u)=0$, $\alpha u\in V$. Logo V é subespaço linear de $\mathbb{R}^n$.

(b) Note que a sucessão $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $a_k=\dim(\mathcal{N}(A^k))$ é crescente e limitada, pois $\mathcal{N}(A^k)\subseteq\mathcal{N}(A^{k+1})\subseteq\mathbb{R}^n$ para todo o $k\in\mathbb{N}$ (logo $a_k\le n$). Assim, a sucessão (a_k) é constante a partir de um certo k_0 (que podemos fixar como sendo o menor inteiro com a propriedade $a_{k_0}=a_{k_0+1}$).

Vamos provar que então $a_k=a_{k_0}$ para $k\ge k_0$ e que $k_0\le n$ (note que isto prova que $V=\mathcal{N}(A^{k_0})=\mathcal{N}(A^n)$). Ora, $a_{k_0}=a_{k_0+1}$ significa que: $A^{k_0+1}u=0\ \Rightarrow\ A^{k_0}u=0$ (*). Assim se $u\in\mathcal{N}(A^{k_0+2})$ então $0=A^{k_0+2}u=A^{k_0+1}(Au)$ e por (*) temos $A^{k_0}(Au)=0$ pelo que $u\in\mathcal{N}(A^{k_0+1})$, portanto $a_{k_0+2}=a_{k_0+1}=a_{k_0}$. Repetindo este procedimento, podemos concluir que $a_k=a_{k_0}$ para $k\ge k_0$. Logo $a_1<a_2<...<a_{k_0-1}<a_{k_0}=a_{k_0+1}=a_{k_0+2}=....$ Se $k_0>n$ então $a_{k_0}>n$ o que contradiz a hipótese de $\mathcal{N}(A^{k_0})\subseteq\mathbb{R}^n$.

II (T3 - 10 valores - 90 minutos)

1. (a) $p(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & a & 3 \\ 0 & 4-\lambda & 0 \\ 3 & b & 1-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)((1-\lambda)^2-3^2) = -(\lambda-4)^2(\lambda+2).$

   (b) A é diagonalizável sse $mg(4)=2$ (pois -2 é zero simples e 4 é zero duplo de $p(/\lambda)$). Assim, A é diagonalizável sse $a+b=0$ pois $A-4I = \begin{bmatrix} -3 & a & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & b & -3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -3 & a & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & a+b & 0 \end{bmatrix}$.

   (c) Para $a=b=0$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $E(-2)=\mathcal{N}(A+2I) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, $E(4)=\mathcal{N}(A-4I) = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \end{bmatrix}$, cujas bases são $\{(1,0,-1)\}$ e $\{(1,0,1),(0,1,0)\}$ (respectivamente). Assim, D=$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ e S=$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ satisfazem a equação $D=S^{-1}AS$.

2. (a) Como $(2+t+t^2)_{\mathcal{B}_1}$=$(1,0,1,0)$, $T(+2+t+t^2)$=$T(1+t)+T(1+t^2)$=$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}+2\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}+3\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$.

   (b) $\{(3,0,0,1),(0,1,0,0),(0,0,1,0)\}$ é uma base para $\mathcal{N}(M(T;\mathcal{B}_1;\mathcal{B}_2))$ pelo que $\{4+3t+t^3, 1-t, 1+t^2\}$ é uma base para $\mathcal{N}(T)$ pois $3(1+t)+(1+t^3)=4+3t+t^3$. Como $\mathrm{car}(M(T;\mathcal{B}_1;\mathcal{B}_2))=1\neq 3=\dim(V)$, T não é sobrejectiva.

   (c) O contradomínio de T tem dimensão 1, pelo que por a), podemos concluir que $\{\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}\}$ é uma base de $\mathcal{I}(T)$. Logo $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \notin \mathcal{I}(T)$, pelo que a equação linear não tem soluções.

3. (a) Ora $V_1=\mathcal{L}(A)$ onde $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, pelo que $V_1^\perp = \mathcal{N}(A)$ e $\{(-1,1,0,0),(-1,0,1,0)\}$ é uma base de $V_1^\perp$.

   (b) $V_2=\mathcal{N}([1\ 1\ 1\ 1])$ pelo que $V_2^\perp=\mathcal{L}([1\ 1\ 1\ 1])\subseteq V_1$, logo $\{1,1,1,1)\}$ é uma base de $V_1\cap V_2^\perp$. Assim,
   $$d((0,0,0,1),V_1\cap V_2^\perp) = ||(0,0,0,1)-P_{V_1\cap V_2^\perp}(0,0,0,1))|| = ||(0,0,0,1)-\tfrac{\langle(0,0,0,1),(1,1,1,1)\rangle}{\langle(1,1,1,1),(1,1,1,1)\rangle}(1,1,1,1)||$$
   $$= ||(0,0,0,1)-\tfrac{1}{4}(1,1,1,1) = \tfrac{\sqrt{3}}{2}.$$

4. Como $\mathrm{tr}(A)=2$ e $\det A=1$, $\lambda=1$ é o único valor próprio de A. Logo A não é diagonalizável e a forma canónica de Jordan é J=$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (note que J^n=$\begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$). Para determinar as colunas u_1, u_2 não colineares da matriz S tal que $A=SJS^{-1}$ podemos resolver as equações $Au_1=u_1$ e $Au_2=u_1+u_2$. Ora $\{(1,3)\}$ é uma base para $E(1)$ (seja $u_1=(1,3)$) e $(A-I)u_2=(1,3)$ tem $u_2=(0,-1)$ como uma das soluções. Portanto, para qualquer $n\in\mathbb{N}$, temos
   $$A^n = SJ^nS^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+3n & -n \\ 9n & -3n+1 \end{bmatrix}.$$
   2^a resolução: calcule A, A^2, A^3 e escreva A^n. Depois, mostre que esta formula está efectivamente correcta usando indução matemática.

5. Temos que $B=I-A$, além disso, $I-A$ é normal $((I-A)(I-A^*)=I-A-A^*-AA^*=(I-A^*)(I-A))$ pois A é normal. Portanto B é normal (existem matrizes U unitária e D diagonal tais que $B=UDU^*$) e é nilpotente (pelo que $\lambda=0$ é o único valor próprio de B). Logo $D=0$ e assim $B=0$. Portanto $0=I-A$, isto é $A=I$.