TESTE DE RECUPERAÇÃO DE ÁLGEBRA LINEAR

MEBiol – MEBiom

I (T1+T2 - 10 valores - 90 minutos)

1. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

   (a) (1.0) Considere a cifra de Hill cuja matriz de codificação é A. Determine a matriz de descodificação e encontre o texto inicial se a mensagem cifrada for: $10,\ 1,\ 2,\ -11,\ 2,\ 4,\ 56,\ 19,\ -14$.

   (b) (1.0) Escreva A como produto de matrizes elementares.

2. (1.0) Caso exista, encontre uma matriz A: $2A = \det\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}\right) A \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

3. (1.0) Sabendo que $\det\begin{bmatrix} -5g & -5h & -5i \\ d & e & f \\ 3a+9d & 3b+9e & 3c+9f \end{bmatrix} = 1$ calcule $\det\begin{bmatrix} a & b & c & 6 \\ d & e & f & 5 \\ g & h & i & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

4. Considere os subespaços lineares V_1 e V_2 de $\mathcal{P}_3$:

$$V_1 = \{p \in \mathcal{P}_3 : p(0) = 0, p(0) - p(-1) = 0\} \text{ e } V_2 = L(\{t+t^2, t+t^3, 2t+t^2+t^3\}).$$

   (a) (1.0) Encontre uma base para V_1.

   (b) (1.0) Calcule $\dim(V_1 + V_2)$.

   (c) (1.0) Encontre uma base de $\mathcal{P}_3$ que contenha uma base de V_1.

   (d) (1.0) Determine as coordenadas de $-t + 2t^2 - 3t^3$ numa base ordenada de V_2 à sua escolha.

5. Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ e considere o conjunto $V=\{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : A^k \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = 0 \text{ para algum } k \in \mathbb{N}\}$.

   (a) (1.0) Mostre que V é um espaço linear.

   (b) (1.0) Mostre que $V = \mathcal{N}(A^n)$.

A seguinte tabela poderá ser útil no problema 1:
$0 = \_,\ 1 = A,\ 2 = B,\ 3 = C,\ 4 = D,\ 5 = E,\ 6 = F,\ 7 = G,\ 8 = H,\ 9 = I,\ 10 = J,\ 11 = K,\ 12 = L,\ 13 = M$
$14 = N,\ 15 = O,\ 16 = P,\ 17 = Q,\ 18 = R,\ 19 = S,\ 20 = T,\ 21 = U,\ 22 = V,\ 23 = W,\ 24 = X,\ 25 = Y,\ 26 = Z$

II (T3 - 10 valores - 90 minutos)

1. Para cada par de reais a, b, seja $A = \begin{bmatrix} 1 & a & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 3 & b & 1 \end{bmatrix}$.

   (a) (1.0) Determine o polinómio característico de A.

   (b) (1.0) Encontre os valores de a, b para os quais A é diagonalizável.

   (c) (1.0) Para $a = b = 0$, encontre matrizes D diagonal e S invertível tais que $D = S^{-1}AS$.

2. Sejam $\mathcal{B}_1 = \{1+t, 1-t, 1+t^2, 1+t^3\}$ e $\mathcal{B}_2 = \{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\}$ bases ordenadas dos espaços lineares $\mathcal{P}_3$ e V (respectivamente) e $T : \mathcal{P}_3 \to V$ a transformação linear tal que

$$M(T; \mathcal{B}_1; \mathcal{B}_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & 0 & -6 \\ 3 & 0 & 0 & -9 \end{bmatrix}.$$

   (a) (1.0) Calcule $T(2 + t + t^2)$.

   (b) (1.0) Encontre uma base para $\mathcal{N}(T)$ e verifique se T é sobrejectiva.

   (c) (1.0) Resolva, em $\mathcal{P}_3$, a equação linear $T(p(t)) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

3. Considere $\mathbb{R}^4$ munido com o produto interno usual e os seguintes subespaços lineares:

$$V_1 = L(\{(1,1,1,0), (0,0,0,1)\}) \text{ e } V_2 = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z + w = 0\}.$$

   (a) (1.0) Determine uma base de $V_1^{\perp}$.

   (b) (1.0) Calcule a distância entre $(0, 0, 0, 1)$ e $V_1 \cap V_2^{\perp}$.

4. (1.0) Seja $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 9 & -2 \end{bmatrix}$. Calcule A^n, para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

5. (1.0) Sejam A matriz normal e B matriz nilpotente (isto é $B^p = 0$ para algum $p \in \mathbb{N}$) tais que $A + B = I$. Mostre que $A = I$.

FIM