Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

1 º Semestre 2018/2019
16 Janeiro 2019
Duração: 90+90 minutos

TESTE DE RECUPERAÇÃO DE ÁLGEBRA LINEAR

MEBiol – MEBiom

I (T1+T2 - 10 valores - 90 minutos)

1. Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ considere o sistema de equações lineares de variáveis reais cuja matriz aumentada é:

$$[A|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & \alpha^2-15 & \alpha-5 \end{array}\right].$$

   (a) (1.0) Discuta em termos de α a existência ou não de solução do sistema de equações lineares anterior.

   (b) (1.0) Para $\alpha = 3$, determine o conjunto solução do sistema de equações lineares correspondente.

   (c) (0.5) Determine os valores de α para os quais $A^9 - A^8$ é invertível.

2. (1.0) Considere a cifra de Hill cuja matriz de descodificação é $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$. Determine a matriz de codificação e encontre o texto inicial se a mensagem cifrada for: $15, 38, 20, 9, 9, 8, 4, 15, 15$.

3. (1.5) Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Verifique que A é invertível, calcule $A^{-1}_{(2,3)}$ e $\det(\det(A)A^{-1})$.

4. Considere os subespaços lineares V_1 e V_2 de $\mathbb{R}^4$:

$$V_1 = L(\{(1,0,0,1),(0,1,1,0),(1,-2,-2,1)\}), \quad V_2 = L(\{(1,0,0,0),(1,1,1,1)\}).$$

   (a) (1.0) Verifique se $(1,1,1,1) \in V_1$.

   (b) (1.0) Encontre uma base para V_1.

   (c) (1.0) Encontre uma base de $V_1 + V_2$ que contenha uma base de V_2.

   (d) (1.0) Calcule $\dim(V_1 \cap V_2)$ e encontre o menor número de equações homogéneas necessárias para descrever $V_1 \cap V_2$ através dessas equações.

5. (0.5) Sejam A, B matrizes $n \times n$ tais que $AB = BA$. Se A for invertível prove que $\mathrm{adj}(A)B = B\,\mathrm{adj}(A)$, onde $\mathrm{adj}(A)$ designa a matriz adjunta de A (transposta da matriz dos cofactores).

6. (0.5) Para cada subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ não vazio seja $V_A = \{f : \mathbb{R} \to A, f \text{ função}\}$. Usando as operações usuais, identifique os subconjuntos A para os quais V_A é um espaço linear real.

A seguinte tabela poderá ser útil no problema 2:
$0 = \_\_,\ 1 = A,\ 2 = B,\ 3 = C,\ 4 = D,\ 5 = E,\ 6 = F,\ 7 = G,\ 8 = H,\ 9 = I,\ 10 = J,\ 11 = K,\ 12 = L,\ 13 = M$
$14 = N,\ 15 = O,\ 16 = P,\ 17 = Q,\ 18 = R,\ 19 = S,\ 20 = T,\ 21 = U,\ 22 = V,\ 23 = W,\ 24 = X,\ 25 = Y,\ 26 = Z$

II (T3 - 10 valores - 90 minutos)

1. Para cada par de reais a, b, seja $A = \begin{bmatrix} 1 & a & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 3 & b & 1 \end{bmatrix}$.

   (a) (1.0) Determine o polinómio característico de A.

   (b) (1.0) Encontre os valores de a, b para os quais A é diagonalizável.

   (c) (1.0) Para $a = b = 0$, encontre matrizes D diagonal e P invertível tais que $D = PAP^{-1}$.

2. Seja $V = \{p \in \mathcal{P}_2 : p(1) = 0\}$ e $T : V \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear dada por $T(p(t)) = (p(-1), p(0))$.

   (a) (1.0) Determine a representação matricial de T em bases de V e de $\mathbb{R}^2$ à sua escolha.

   (b) (1.0) Verifique se T é bijectiva. Nesse caso, calcule $T^{-1}(x, y)$ para $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

   (c) (1.0) Verifique se existe uma transformação linear $R : \mathbb{R}^3 \to V$ tal que $T \circ R$ seja injectiva.

3. Considere $\mathbb{R}^3$ munido com o produto interno dado pela função:

$$\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = 2x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3$$

   e seja $V = L(\{(1, 1, 1)\})$.

   (a) (1.0) Verifique que, de facto, a função acima definida é um produto interno em $\mathbb{R}^3$.

   (b) (1.0) Determine uma base de $V^\perp$.

   (c) (1.0) Calcule a distância entre $(-1, 1, 0)$ e V.

4. (0.5) Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ anti-simétrica $A = -A^T$ e n ímpar. Prove que 0 é o único valor próprio real de A.

5. (0.5) Seja $\langle \cdot, \cdot \rangle$ um produto interno num espaço linear V e $T : V \to V$ uma transformação linear. Para $u, v \in V$ seja $[u, v] = \langle T(u), T(v) \rangle$. Para que transformações lineares T é que $[\cdot, \cdot]$ define um produto interno em V?

FIM