RESOLUÇÃO DO TESTE DE RECUPERAÇÃO DE ÁLGEBRA LINEAR

MEBiol – MEBiom

I (T1+T2 - 10 valores - 90 minutos)

1. Usando eliminação de Gauss na matriz aumentada temos:
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & \alpha^2-15 & \alpha-5 \end{array}\right] \xrightarrow{-3L_1+L_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -8 & \alpha^2-9 & \alpha-11 \end{array}\right] \xrightarrow{-8L_2+L_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha^2-9 & \alpha-3 \end{array}\right].$$
   (a) Assim o sistema inicial é possível sse $\alpha \neq \pm 3$. Para $\alpha = -3$ o sistema é impossível. Para $\alpha = 3$ o sistema é indeterminado.
   (b) Para $\alpha = 3$ o sistema é indeterminado e é equivalente a $x + 2y - 2z = 2, y = 1$. O conjunto solução é $\mathcal{S} = \{(2z, 1, z) \in \mathbb{R}^3 : z \in \mathbb{R}\}$.
   (c) Note que $A^9 - A^8 = A^8(A - I)$. Uma vez que a 2^a linha de $A - I$ é toda nula, $A - I$ não é invertível, logo $A^9 - A^8$ não é invertível para todo o α.

2. Uma vez que $A = (A^{-1})^{-1}$, podemos usar o método de Gauss-Jordan para calcular a matriz de codificação $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Fazendo a partição da mensagem codificada em blocos de 3 obtém-se a matriz Y, pelo que a matriz X da mensagem original é $X=A^{-1}Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 15 & 9 & 4 \\ 38 & 9 & 15 \\ 20 & 8 & 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 9 & 4 \\ 2 & 7 & 15 \\ 18 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.
A matriz X em sequencia é $15, 2, 18, 9, 7, 1, 4, 15, 0$. Usando a tabela obtém-se o texto: `OBRIGADO` .

3. Usando a R. de Laplace, $\det(A) = -2\det\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = -6\det\begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} = -24$. Logo A é invertível e
$$(A^{-1})_{2,3} = \frac{-\det(A_{3,2})}{\det A} = \frac{-\det\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}{-24} = 0.$$ Finalmente, $\det(\det(A)A^{-1}) = \det(A)^5 \det(A)^{-1} = 24^4$.

4. (a) Como $(1, 1, 1, 1) = 1(1, 0, 0, 1) + 1(0, 1, 1, 0) + 0(1, -2, -2, 1)$, $(1, 1, 1, 1) \in V_1$.
   (b) Sendo $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$, $V_1 = \mathcal{C}(A)$. Usando eliminação de Gauss podemos concluir que $\{(1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0)\}$ é uma base de V_1.
   (c) Como $V_1 + V_2 = \mathcal{C}(B)$ onde $B=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ onde as primeiras 2 colunas de B são formadas por uma base de V_2. Qualquer matriz em escada que se obtenha de B tem 3 pivots nas primeiras 3 colunas, portanto $\{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 1, 0), (1, 0, 0, 1)\}$ é uma tal base $V_1 + V_2$.
   (d) dim $(V_1 + V_2) = 3$ logo $\dim(V_1 \cap V_2) = 1$ pelo teorema das dimensões. Logo precisamos de pelo menos 3 equações lineares homogéneas.

5. Sendo A invertível, $\mathrm{adj}(A) = |A|A^{-1}$. Multiplicando a equação $AB = BA$ por A^{-1} à esquerda e à direita e depois por $|A|$ obtemos $B(|A|A^{-1}) = (|A|A^{-1})B$ como pretendido.

6. Sabemos que $V_{\mathbb{R}}$ é um espaço linear, assim como $V_{\{0\}}$. Para outro subconjunto A, seja $b \notin A$ e $a \in A, a \neq 0$. Considere-se a função $f \in V_A$ constante tal que $f(t) = a \in A$. Ora $\frac{b}{a}f \notin V_A$ pois $(\frac{b}{a}f)(t) = \frac{b}{a}a = b \notin A$, logo V_A não é espaço linear nestes casos.

II (T3 - 10 valores - 90 minutos)

1. (a) $p(\lambda)=\det(A-\lambda I)=\det\begin{bmatrix}1-\lambda & a & 3\\ 0 & 4-\lambda & 0\\ 3 & b & 1-\lambda\end{bmatrix}=(4-\lambda)\det\begin{bmatrix}1-\lambda & 3\\ 3 & 1-\lambda\end{bmatrix}=-(\lambda+2)(\lambda-4)^2$.

   (b) $\lambda_1=-2$ e $\lambda_2=4$ são os valores próprios de A com $\text{ma}(\lambda_2)=2$. Logo A is diagonalizavél sse $\text{mg}(\lambda_2)=2$ porque λ_1 pois $\text{gm}(\lambda_1)=\text{ma}(\lambda_1)$. isto é, A diagonalizavél sse $\text{car}(A-\lambda_2 I)=1$. Note que $E(\lambda_2)=\mathcal{N}\begin{bmatrix}-3 & a & 3\\ 0 & 0 & 0\\ 3 & b & -3\end{bmatrix}=\mathcal{N}\begin{bmatrix}-3 & a & 3\\ 0 & a+b & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$, logo $\text{mg}(\lambda_2)=2$ sse $a+b=0$. Conclusão: A é diagonalizavél sse $a+b=0$.

   (c) Usando (b), podemos concluir que $\{(1,0,1),(0,1,0)\}$ é uma base de $E(\lambda_2)$. Como $E(\lambda_1)=\mathcal{N}\begin{bmatrix}3 & 0 & 3\\ 0 & 6 & 0\\ 3 & 0 & 3\end{bmatrix}$, $\{(1,0,-1)\}$ é uma base de $E(\lambda_1)$. Assim $D=\begin{bmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}$ e $P=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix}^{-1}$ satisfazem $D=PAP^{-1}$.

2. (a) Note-se que $\dim(V)=2$ e $\mathcal{B}_1=\{-1+t,-1+t^2\}$ é uma base (ordenada) de V. Como $T(-1+t)=(-2,-1)$ e $T(-1+t^2)=(0,-1)$, $A:=M(T;\mathcal{B}_1;\mathcal{B}_2)=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ -1 & -1\end{bmatrix}$ onde $\mathcal{B}_2$ é a base canónica de $\mathbb{R}^2$.

   (b) T é bijectiva pois A é invertível. Como $A^{-1}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-x\\ x-2y\end{bmatrix}$, $T^{-1}(x,y)=\frac{1}{2}(-x)(-1+t)+\frac{1}{2}(x-2y)(-1+t^2)$.

   (c) Se existir tal transformação linear, então qualquer representação matricial B de $T\circ R$ será uma matriz 2×3. Como $\dim(\mathcal{N}(B))\neq 0$, $T\circ R$ não pode ser injectiva.

3. (a) Temos $\langle(x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\rangle=[x_1\ x_2\ x_3]A[y_1\ y_2\ y_3]^T$ onde $A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$. Como A é simétrica e os seus valores próprios, 1, 1 e 3, são estritamente positivos, a função define um produto interno em $\mathbb{R}^3$.

   (b) $(x,y,z)\in V^\perp$ sse $\langle(x,y,z),(1,1,1)\rangle=0$. Como $\langle(x,y,z),(1,1,1)\rangle=x+y+3z$, $\{(-1,1,0),(-3,0,1)\}$ é uma base de $V^\perp$.

   (c) $d((-1,1,0),V))=||P_{V^\perp}(-1,1,0)||=||(-1,1,0)||$ pois $(-1,1,1)\in V^\perp$. Por outro lado, $||(-1,1,0)||=\sqrt{\langle(-1,1,0),(-1,1,0)\rangle}=\sqrt{6}$. Logo $d((-1,1,0),V))=\sqrt{6}$.

4. Seja λ valor própriode A e u um vector próprio de A associado a λ. Assim, $\lambda\langle u,u\rangle=\langle Au,u\rangle=\langle u,A^*u\rangle=\langle u,-Au\rangle=\langle u,-\lambda u\rangle=-\overline{\lambda}\langle u,u\rangle$. Logo $\lambda=-\overline{\lambda}$, pelo que ou $\lambda=0$ ou a parte imaginária de λ não é nula. Falta ver que $\lambda=0$ é valor próprio. Para isso, basta verificar que $|A|=0$. Ora $|A|=|-A^T|=(-1)^n|A|=-|A|$ onde se usou a hipótese de n ser ímpar na última igualdade. Portanto $|A|=0$ e assim $\lambda=0$ é valor próprio de A.

5. Os axiomas da linearidade e da simetria verificam-se para qualquer T. O axioma da positividade verifica-se somente se T fôr injectiva, pois $[u,u]=0$ sse $\langle T(u),T(u)\rangle=0$ sse $T(u)=0$.