RESOLUÇÃO DO TESTE 3 DE ÁLGEBRA LINEAR

Duração: 90 minutos

MEBiol – MEBiom

1. (a) Usando a fímula de Laplace temos $p(\lambda)=\det(A-\lambda I)=\det\begin{bmatrix}1-\lambda & -2 & 0 & 0\\ -2 & 1-\lambda & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1-\lambda & -2\\ 0 & 0 & -2 & 1-\lambda\end{bmatrix}=$
$=(1-\lambda)\det\begin{bmatrix}1-\lambda & 0 & 0\\ 0 & 1-\lambda & -2\\ 0 & -2 & 1-\lambda\end{bmatrix}+2\det\begin{bmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & 1-\lambda & -2\\ 0 & -2 & 1-\lambda\end{bmatrix}=(1-\lambda)^2\det\begin{bmatrix}1-\lambda & -2\\ -2 & 1-\lambda\end{bmatrix}$
$-4\det\begin{bmatrix}1-\lambda & -2\\ -2 & 1-\lambda\end{bmatrix}=((1-\lambda)^2-4))\det\begin{bmatrix}1-\lambda & -2\\ -2 & 1-\lambda\end{bmatrix}=(\lambda+1)^2(\lambda-3)^2.$

   (b) Por (a), $\lambda_1=-1$ and $\lambda_2=3$ são os valores próprios de A, ambos com mult. alg. igual a 2. Em seguida $E(\lambda_1)=\mathcal{N}\begin{bmatrix}2 & -2 & 0 & 0\\ -2 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & -2\\ 0 & 0 & -2 & 2\end{bmatrix}$ and $E(\lambda_2)=\mathcal{N}\begin{bmatrix}-2 & -2 & 0 & 0\\ -2 & -2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -2 & -2\\ 0 & 0 & -2 & -2\end{bmatrix}$. Logo $\{(1,1,0,0),(0,0,1,1)\}$ é uma base de $E(\lambda_1)$ e $\{(-1,1,0,0),(0,0,-1,1)\}$ é uma base de $E(\lambda_2)$.

   (c) Podemo considerar $Q=\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 1\end{bmatrix}$, $D=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$. Observe-se que A é simétrica e as bases de $E(\lambda_1)$ e $E(\lambda_2)$ de (b) já são ortogonais, pelo que para encontrar as colunas de Q^T só precisamos de normalizar os 4 vectores de (b) .

   (d) A função pode ser escrita como $\langle(x_1,x_2,x_3,x_4),(y_1,y_2,y_3,y_4)\rangle=[x_1\ x_2\ x_3\ x_4]\ (3A)[y_1\ y_2\ y_3\ y_4]^T$ onde A é a matriz (simétrica) do enunciado. Esta função não define um produto interno pois $3A$ tem um valor próprio negativo (os valores pp de $3A$ são -3 and 9 pois são 3 vezes os de A).

2. (a) $(R\circ T)(2,2)=R(T(2,2))=R(6-2t)=6R(1)-2R(t)=18(-2+t)-4(3-t))=-48+22t.$

   (b) T não é injectiva pois $(2,4)=(3,3)-(1,-1)\in\mathcal{N}(T)$, logo $R\circ T$ também não é injectiva. Como $M(R;\mathcal{B}_1;\mathcal{B}_2)$ é invertível, R é bijectiva.

   (c) Como R é bijectva, existe uma única solução $p(t)=a+bt$. Temos $M(R;\mathcal{B}_1;\mathcal{B}_2)\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-6\\ 6\end{bmatrix}$, pois $(p(t))_{\mathcal{B}_1}=(a,b)$ e $(-30+12t)_{\mathcal{B}_2}=(-6,6)$. Logo $p(t)=2-3t$.

3. (a) $U=\mathcal{L}(A)$ onde $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$, pelo que $U^\perp=\mathcal{N}(A)$ cuja base é $\{(0,1,0,0)\}$.

   (b) Como $U+U^\perp=\mathbb{R}^4$, $(1,2,3,4)\in U+U^\perp$, portanto $d((1,2,3,4),(U+U^\perp)^\perp)=||P_{U+U^\perp}(1,2,3,4)||=||(1,2,3,4)||=\sqrt{30}$.

4. Sejam $e_1=(1,0)$, $e_2=(0,1)$. A aplicação R é uma transformação linear pois $R(\alpha T_1+T_2)=((\alpha T_1+T_2)(e_1),(\alpha T_1+T_2)(e_2))=\alpha R(T_1)+R(T_2)$. Em seguida note que $T(x,y)=xT(e_1)+yT(e_2)$ (eq. (*)) para $T\in V$, pelo que é fácil verificar que R é bijectiva. (Nomeadamente, $R(T)=(0,0)$, implica $T(e_1)=T(e_2)=0$, pelo que (*) implica $T=\mathbf{0}$, portanto T é injectiva. Seja $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ e defina-se $T\in V$ como $T(x,y)=x+y$. É claro que $R(T)=(x,y)$, pelo que T é sobrejectiva.)

5. Sejam $\mathbb{R}^n\xrightarrow{T_1}\mathbb{R}^n\xrightarrow{T_2}\mathbb{R}^n$ as transformações lineares tais que $A=M(T_1;Bc;Bc)$ e $B=M(T_2;Bc;Bc)$ (logo $\mathcal{I}(T_1)=\mathcal{C}(A)$, $\mathcal{N}(T_2)=\mathcal{N}(B)$, etc.). Seja T a restrição de T_2 ao contradomínio $\mathcal{I}(T_1)$ de T_1. Assim, sabemos que $\dim\mathcal{N}(T)+\dim\mathcal{I}(T)=\dim\mathcal{I}(T_1)$ (espaço de partida de T). Por outro lado, $\mathcal{N}(T)=\mathcal{I}(T_1)\cap\mathcal{N}(T_2)$ e $\mathcal{I}(T)=\mathcal{I}(T_2\circ T_1)$, podemos concluir que $\dim(\mathcal{N}(T))=\dim(\mathcal{C}(A)\cap\mathcal{N}(B))$ e $\dim((\mathcal{I}(T)))=\text{car}(BA)$. O resultado fica demonstrado, pois $\dim\mathcal{I}(T_1)=\text{car}(A)$.