Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

1^0 Semestre 2018/2019
15 Dezembro 2018
Duração: 90 minutos

3^{o} TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR

MEBiol – MEBiom

1. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

   (a) (1.0) Prove que o polinómio característico de A é $p(\lambda) = (\lambda+1)^2(\lambda-3)^2$.

   (b) (1.0) Encontre uma base para cada espaço próprio de A.

   (c) (1.0) Encontre uma matriz ortogonal Q e uma matriz diagonal D tais que $D = QAQ^T$.

   (d) (1.0) Verifique se a função

   $$\langle (x_1,x_2,x_3,x_4),(y_1,y_2,y_3,y_4)\rangle = 3x_1y_1 - 6x_1y_2 - 6x_2y_1 + 3x_2y_2 + 3x_3y_3 - 6x_3y_4 - 6x_4y_3 + 3x_4y_4$$

   define um produto interno em $\mathbb{R}^4$.

2. Sejam $\mathcal{B}_1{=}\{1,t\}$, $\mathcal{B}_2{=}\{3-t,-2+t\}$ bases ordenadas de $\mathcal{P}_1$ (espaço linear real dos polinómios reais de grau menor ou igual a 1). Considere as transformações lineares $T : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{P}_1$ e $R : \mathcal{P}_1 \to \mathcal{P}_1$ definidas por

   $$T(1,1) = 3-t, \quad T(1,-1) = 9-3t \quad \text{e} \quad M(R;\mathcal{B}_1;\mathcal{B}_2) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

   (a) (1.0) Calcule $(R\circ T)(2,2)$.

   (b) (1.0) Verifique se T ou R ou $R\circ T$ são injectivas.

   (c) (1.0) Resolva, em $\mathcal{P}_1$, a equação linear $R(p(t)) = -30+12t$.

3. Considere $\mathbb{R}^4$ munido com o produto interno usual e $U = L(\{(1,0,0,1),(1,0,1,0),(0,0,1,1)\})$.

   (a) (1.0) Encontre uma base para $U^\perp$.

   (b) (0.5) Calcule a distância entre $(1,2,3,4)$ e $(U+U^\perp)^\perp$.

4. (0.5) Considere $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$ e o espaço linear $V{=}\{T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ T \text{ transformação linear}\}$, munido com as operações usuais. Verifique se a aplicação $R : V \to \mathbb{R}^2$ definida por $R(T) = (T(e_1),T(e_2))$ é uma transformação linear bijectiva.

5. (1.0) Sejam $A,B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Prove que $\dim(\mathcal{C}(A)\cap\mathcal{N}(B)) = \text{car}(A) - \text{car}(BA)$.

FIM