RESOLUÇÃO DO TESTE 2 DE ÁLGEBRA LINEAR

MEBiol – MEBiom

1. (a) É claro que $\dim(V_1)$=3. Por outro lado, $(x,y,z,w) \in V_1$ sse y=$z-2w$ sse $(x,y,z,w)=(x,z-2w,z,w)$=$x(1,0,0,0)+z(0,1,1,0)+w(0,-2,0,1)$. Assim $\{(1,0,0,0),(0,1,1,0),(0,-2,0,1)\}$ gera V_1. Como $\dim(V_1)=3$, $\{(1,0,0,0),(0,1,1,0),(0,-2,0,1)\}$ é uma base de V_1.

   (b) Note que $(x,y,z,w) \in V_2$ sse os sistema linear $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & x \\ 1 & 2 & -2 & y \\ 1 & 2 & 0 & z \\ 0 & 0 & 1 & w \end{array}\right]$ fôr possível. Usando eliminação de Gauss temos: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & x \\ 1 & 2 & -2 & y \\ 1 & 2 & 0 & z \\ 0 & 0 & 1 & w \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & x \\ 0 & 0 & -2 & y-x \\ 0 & 0 & 0 & z-x \\ 0 & 0 & 1 & w \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & x \\ 0 & 0 & 1 & w \\ 0 & 0 & 0 & y-x+2w \\ 0 & 0 & 0 & z-x \end{array}\right]$. Portanto $\{(1,1,1,0),(0,-2,0,1)\}$ é uma base de V_2 e $V_2=\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4 : y-x+2w=0, z-x=0\}$.

   (c) $\dim(V_1\cap V_2+V_2\cap V_1)=2$, pois em geral $V_1\cap V_2+V_2\cap V_1=V_1\cap V_2$ e neste caso $V_2\subseteq V_1$ portanto $V_2\cap V_1=V_2$. Em alternativa, podemos calcular dim $(V_1\cap V_2)$, usando 1b), nomeadamente $\dim(V_1\cap V_2)$= $\dim\mathcal{N}\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = ... = 2$.

2. Sejam E_1=$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, E_2=$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, A_1=$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, A_2=$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $K=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$. Como $A_1=\mathbf{1}E_1-\mathbf{1}E_2$ e $A_2=\mathbf{1}E_1+\mathbf{0}E_2$, $S_{\mathcal{B}_2\to\mathcal{B}_1}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, logo $S_{\mathcal{B}_1\to\mathcal{B}_2}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.
   Finalmente, como $K=2E_1+3E_2$, $K_{\mathcal{B}_1}=(2,3)$, e $S_{\mathcal{B}_1\to\mathcal{B}_2}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix}$, $K_{\mathcal{B}_2}=(-3,5)$.

3. Em geral o número de colunas de $A^T=\text{car}(A^T)$+$\dim(\mathcal{N}(A^T))$, pelo que $\text{car}(A^T)$=2. Logo $\text{car}(A)=2$ pois, em geral, $\text{car}(A^T)$=$\text{car}(A)$. Além disso, $\mathcal{C}(A)\subseteq\mathbb{R}^2$ e $\dim\mathcal{C}(A)$=$\text{car}(A)$=2. Portanto $\mathcal{C}(A)=\mathbb{R}^2$, pelo que p.ex. podemos escolher a base canónica $\{(1,0),(0,1)\}$.

4. Seja A=$[a_{ij}]_{i,j\in\{1,2\}}$ e B=$[b_{pq}]_{\substack{p\,\in\,\{1,2,3\}\\ q\,\in\,\{1,2\}}}$. Se $\mathcal{L}(A)\subseteq\mathcal{L}(B)$ então cada (vector) linha de A é combinação linear das linhas de B. Assim para $i=1,2$, existem constantes $\alpha_i,\beta_i,\gamma_i$ tais que

$$(a_{i1},a_{i2})=\alpha_i(b_{11},b_{12})+\beta_i(b_{21},b_{22})+\gamma_i(b_{31},b_{32}).$$

   Logo $\begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} \end{bmatrix}$=$\begin{bmatrix} \alpha_i & \beta_i & \gamma_i \end{bmatrix}B$ para $i=1,2$. Seja C=$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{bmatrix}$. Temos então $A=CB$ como pretendido. Reciprocamente, $A=CB$ significa que cada linha de A é combinação linear de linhas de B (ver argumento anterior). Portanto as linhas das A estão em $\mathcal{L}(B)$, pelo que pela definição de expansão linear $\mathcal{L}(A)\subseteq\mathcal{L}(B)$.

FIM