Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

1^0 Semestre 2018/2019
15 Novembro 2018
Duração: 45 minutos

2^{o} TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR

MEBiol – MEBiom

1. Considere os seguintes subespaços lineares de $\mathbb{R}^4$:

$$V_1 = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : y - z + 2w = 0\}, \quad V_2 = \mathrm{L}(\{(1,1,1,0),(2,2,2,0),(0,-2,0,1)\}).$$

   (a) (1.0) Encontre uma base de V_1.

   (b) (1.0) Encontre uma base de V_2 e escreva V_2 como um conjunto de equações lineares homogéneas.

   (c) (1.0) Calcule $\dim(V_1 \cap V_2 + V_2 \cap V_1)$.

2. (1.0) Sejam $\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ e $\mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ bases ordenadas do subespaço linear V de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

   Determine a matriz mudança de base $S_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2}$ e encontre as coordenadas de $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ na base $\mathcal{B}_2$.

3. (0.5) Seja A matriz do tipo 2×5 tal que $\dim(\mathcal{N}(A^T))$=0. Calcule $\mathrm{car}(A)$ e encontre uma base para o espaço das colunas $\mathcal{C}(A)$ de A.

4. (0.5) Sejam A e B matrizes do tipo 2×2 e 3×2, respectivamente. Prove que $\mathcal{L}(A) \subseteq \mathcal{L}(B)$ se e só se existe uma matriz C do tipo 2×3 tal que $A = CB$.

FIM