# RESOLUÇÃO DO TESTE 1 DE ÁLGEBRA LINEAR

MEBiol – MEBiom

1. Usando operações elementares:
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & \alpha^2-14 & \alpha+2 \end{array}\right] \xrightarrow[-4L_1+L_3]{-3L_1+L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -7 & 14 & -10 \\ 0 & -7 & \alpha^2-2 & \alpha-14 \end{array}\right] \xrightarrow{-L_2+L_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -7 & 14 & -10 \\ 0 & 0 & \alpha^2-16 & \alpha-4 \end{array}\right].$$

   (a) O sistema linear é possível e determinado para $\alpha \neq \pm 4$. Para $\alpha = -4$ o sistema linear é impossível. Para $\alpha = 4$ o sistema linear é possível e indeterminado.

   (b) Note que $A^5$ é invertível pois $A$ é invertível (car($A$)=3 para $\alpha = 5$). Portanto, o sistema homogéneo associado a $A^5$ é determinado e assim o seu conjunto solução $\mathcal{S}$ só contém a solução trivial, isto é $\mathcal{S} = \{(0,0,0)\}$.

2. (a) Usando o método de Gauss-Jordan é fácil concluir que $A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

   (b) Em primeiro lugar, considera-se a mensagem cifrada $Y$ em blocos de $3 \times 1$ e depois considera-se a matriz $Y$ cujas colunas são estes blocos, e em seguida calcula-se
$$X = A^{-1}Y = A^{-1} \begin{bmatrix} 17 & 26 & 21 \\ 15 & 5 & 9 \\ -20 & -45 & -42 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 19 & 21 \\ 15 & 5 & 9 \\ 14 & 7 & 0 \end{bmatrix}.$$
   Colocando as colunas desta matriz $X$ em sequencia $3, 15, 14, 19, 5, 7, 21, 9, 0$ e usando a tabela obtém-se o texto: `CONSEGUI`.

3. (a) Usando a fórmula de Laplace na $3^a$ coluna (2 vezes):
$$\det(A) = +2 \det \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 7 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 2 \det \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 1 \end{bmatrix} = -38.$$
   Assim $(A^{-1})_{(1,2)} = \frac{(-1)^{2+1} \det A_{21}}{\det A} = \frac{-\det \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix}}{-38} = \frac{-(-2)}{-38} = -\frac{1}{19}$.

   (b) Em primeiro lugar $\det\left(\det(A)(A^{-3})^T\right) = \det(A)^4 \det((A^{-3})^T) = \frac{\det(A)^4}{\det(A^3)} = \det(A) = -38$. Portanto a equação matricial é equivalente a $-38(I+\mathbf{X})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$. Logo $I+\mathbf{X} = -38I$, donde $\mathbf{X} = -39I$.

4. Como $A^2 = -I$, $\det(A^2) = \det(-I) = (-1)^n \det(I)$. Logo $(\det(A))^2 = (-1)^n$. Portanto para $n$ ímpar, $\det(A)^2 = -1$. Esta equação não tem solução, pois $\det(A) \in \mathbb{R}$ dado que $A$ é uma matriz real.

FIM