Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

1^0 Semestre 2018/2019
18 Outubro 2018
Duração: 45 minutos

1^{o} TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR

MEBiol – MEBiom

1. Para cada escalar $\alpha \in \mathbb{R}$ considere o sistema de equações lineares de variáveis reais cuja matriz aumentada $[A|b]$ é dada por:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & \alpha^2-14 & \alpha+2 \end{array}\right].$$

   (a) (1.0) Discuta em termos de α a existência ou não de solução do sistema de equações lineares anterior.

   (b) (0.5) Para $\alpha = 5$, determine o conjunto solução do sistema homogéneo $A^5\mathbf{x} = \mathbf{0}$ associado à matriz A^5.

2. Considere a cifra de Hill cuja matriz de codificação é $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

   (a) (0.5) Determine a matriz de descodificação.

   (b) (0.5) Encontre o texto inicial se a mensagem cifrada for: $17, 15, -20, 26, 5, -45, 21, 9, -42$.

3. Seja $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & -2 & -3 \end{bmatrix}$.

   (a) (1.0) Calcule $(A^{-1})_{(1,2)}$.

   (b) (1.0) Determine $\mathbf{X} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tal que: $\det\Big(\det(A)\ (A^{-3})^T\Big)\,(I+\mathbf{X})^{-1}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

4. (0.5) Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que $A^2 + I = \mathbf{0}$. Prove que n é par.

FIM

A seguinte tabela poderá ser útil no problema 2:
$0 = \_\_,\ 1 = A,\ 2 = B,\ 3 = C,\ 4 = D,\ 5 = E,\ 6 = F,\ 7 = G,\ 8 = H,\ 9 = I,\ 10 = J,\ 11 = K,\ 12 = L,\ 13 = M$
$14 = N,\ 15 = O,\ 16 = P,\ 17 = Q,\ 18 = R,\ 19 = S,\ 20 = T,\ 21 = U,\ 22 = V,\ 23 = W,\ 24 = X,\ 25 = Y,\ 26 = Z$