RESOLUÇÃO DO TESTE 3 DE ÁLGEBRA LINEAR

MEAmbi - MEBiol

1. (a) $p(\lambda)=\det(A-\lambda I)=\det\begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix}=(3-\lambda)\det\begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{bmatrix}=-(\lambda-1)(\lambda-3)^2$.

   A matriz A é diagonalizável porque A é simétrica $A=A^T$.

   (b) Por (a) $\lambda_1=1$ e $\lambda_2=3$ são os valores próprios de A. Além disso $E(1)=\mathcal{N}(A-I)=\mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$ e $E(3)=\mathcal{N}(A-3I)=\mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}\right)$, pelo que $\{((-1,0,1))\}$ e $\{(0,1,0),(1,0,1)\}$ são bases de $E(1)$ e $E(3)$, respectivamente. Como $(0,1,0)\perp(1,0,1)$,$\{\frac{(-1,0,1)}{\sqrt{2}},(0,1,0),\frac{(1,0,1)}{\sqrt{2}}\}$ é uma base o.n. de $\mathbb{R}^3$ formada por vectores próprios de A. Assim temos $D=QAQ^T$ com

$$D=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix},\ Q^T=\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}\ \text{e}\ Q=(Q^T)^T=\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}.$$

   (c) $\sqrt{A}=Q^T\sqrt{D}Q=\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+\sqrt{3} & 0 & -1+\sqrt{3} \\ 0 & 2\sqrt{3} & 0 \\ -1+\sqrt{3} & 0 & 1+\sqrt{3} \end{bmatrix}$.

2. (a) $T(3+t3t^2)=3T(1+t^2)=3((1,1)+3(1,3))=(12,30)$.

   (b) Como $\{(-1,0,1\}$ é uma base de $\mathcal{N}(A)$ e $-(1+t)+1(1+t^2)=-t+t^2$ conclui-se que $\{-t+t^2\}$ é uma base de $\mathcal{N}(T)$. Como car(A)=dim(Esp. Chegada), T é sobrejectiva.

   (c) Por (a), $-\frac{1}{2}(1+t^2)$ é uma solução de eq. linear, portanto as soluções de $T(p(t))=(-3,-12)$ são

$$-\frac{1}{2}(1+t^2)+\mathcal{N}(T)=\{-\frac{1}{2}-ct+(c-\frac{1}{2})t^2:\ c\in\mathbb{R}\}.$$

   (d) A existência de uma tal transformação linear é equivalente à existência de uma matriz $B\in\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tal que $BA=-2A$. Tal matriz existe, com $B=-2I$.

3. (a) $V=\mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}\right)$, pelo que $V^\perp=\mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}\right)$. Portanto $\{(1,2,0,0),(0,0,1,-1)\}$ é uma base (que é ortogonal!) de $V^\perp$.

   (b) Como $\{(-2,1,0,0),(0,0,1,1)\}$ é uma base ortogonal de V, $d((0,5,1,1),V^\perp)=||P_V(0,5,1,1)||=||\frac{\langle(0,5,1,1),(-2,1,0,0)\rangle}{\langle(-2,1,0,0),(-2,1,0,0)\rangle}(-2,1,0,0)+\frac{\langle(0,5,1,1),(0,0,1,1)\rangle}{\langle(0,0,1,1),(0,0,1,1)\rangle}(0,0,1,1)||=||(-2,1,1,1)||=\sqrt{7}$.

   (c) Seja W esse subespaço. Note que $\{u_1,u_2,u_3\}$ é uma base de U, onde $u_1=(-2,1,0,0),u_2=(0,0,1,0)$ e $u_3=(0,0,0,1)$. Portanto $u\in U$ sse $u=c_1u_1+c_2u_2+c_3u_3$. Assim $u\in W$ sse

$$\langle u,(-2,1,0,0)\rangle=\langle u,(0,0,1,1)\rangle=0$$

   pelo que $5c_1=0$ e $c_2+c_3=0$. Assim $u=-c_3u_2+c_3u_3=c_3(0,0,-1,1)$ e assim $\{(0,0,-1,1)\}$ é um base de W (W é o complemento ortogonal de V em U).

4. Por definição de representação matricial $T(v_i)=\sum_{j=1}^n a_{ij}v_j$ (para cada $i\in\{1,...,n\}$). Assim,

$$\langle T(v_i),v_i\rangle=\langle\sum_{j=1}^n a_{ij}v_j,v_i\rangle=\sum_{j=1}^n a_{ij}\langle v_j,v_i\rangle=a_{ii}$$

onde se usa na última igualdade o facto de a base ser ortonormada. Logo tr(A)=$\sum_{i=1}^n a_{ii}$=$\sum_{i=1}^n\langle T(v_i),v_i\rangle$.