Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

1^o Semestre 2016/2017
16 de dezembro de 2017
Duração: 90 minutos

3^o TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR

MEAmbi - MEBiol

1. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

   (a) (1.0) Encontre o polinómio característico de A e verifique se A é diagonalizável.

   (b) (1.0) Determine uma matriz ortogonal Q e uma matriz diagonal D tais que $D = QAQ^T$.

   (c) (1.0) Calcule $\sqrt{A}$.

2. Sejam $\mathcal{B}_1 = \{1+t, 1-t, 1+t^2\}$ e $\mathcal{B}_2 = \{(1,1),(1,3)\}$ bases ordenadas de $\mathcal{P}_2$ e $\mathbb{R}^2$ (respectivamente) e $T : \mathcal{P}_2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear tal que:

$$A = M(T; \mathcal{B}_1; \mathcal{B}_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

   (a) (1.0) Calcule $T(3+3t^2)$.

   (b) (1.0) Determine uma base para $\mathcal{N}(T)$ e verifique se T é sobrejectiva.

   (c) (1.0) Resolva, em $\mathcal{P}_2$, a equação linear $T(p(t)) = (-2,-5)$.

   (d) (0.5) Verifique se existe uma transformação linear $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $M(R \circ T; \mathcal{B}_1; Bc) = -2A$, onde Bc designa a base canónica de $\mathbb{R}^2$.

3. Considere $\mathbb{R}^4$ munido com o produto interno usual e $V = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x + 2y = 0, z - w = 0\}$.

   (a) (1.0) Determine uma base ortogonal para $V^\perp$.

   (b) (1.0) Calcule a distância entre $(0,5,1,1)$ e $V^\perp$.

   (c) (0.5) Seja U=$\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x + 2y = 0\}$. Determine uma base para o seguinte subespaço

$$\{u \in U : \langle u, v \rangle = 0 \text{ para qualquer } v \in V\}.$$

4. (1.0) Num espaço euclidiano E, considere a representação matricial $A = M(T; \mathcal{B}; \mathcal{B})$ de uma transformação linear $T : E \to E$ numa base ordenada e ortonormada $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$ de E.
   Prove que

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} \langle T(v_i), v_i \rangle.$$

FIM