Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

1^o Semestre 2017/2018
21 de novembro de 2017
Duração: 45 minutos

2^o TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR

MEAmbi - MEBiol

1. Para cada real α considere o seguinte conjunto

$$V_\alpha = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : y - 3z + 2w = 0, \quad \alpha x + y - 3z + 2w = \alpha^2 - \alpha\}.$$

   (a) (1.0) Identifique os valores de α para os quais V_α é subespaço linear de $\mathbb{R}^4$.

   (b) (1.0) Determine uma base para V_0.

   (c) (1.0) Encontre uma base de V_0 que inclua o vector $(1, 3, 1, 0)$.

   (d) (0.5) Calcule $\dim(V_0 + V_1)$.

2. (1.0) Seja $\mathcal{P}_2$ o espaço linear real dos polinómios (na variável real t) de grau menor ou igual a 2. Sejam $\mathcal{B}_1 = \{p_1, p_2\}$ e $\mathcal{B}_2 = \{q_1, q_2\}$ bases ordenadas de um subespaço linear U de $\mathcal{P}_2$, onde $p_1(t) = 1 - t$ e $p_2(t) = 2t + t^2$, tais que a matriz mudança de base $S_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2}$ é

$$S_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^{-1}.$$

   Determine o polinómio $p(t)$ sabendo que $(-2, 1)$ são as coordenadas de $p(t)$ na base $\mathcal{B}_2$.

3. (0.5) Considere um conjunto de vectores $\{v_1, v_2, v_3\}$ linearmente independente num espaço linear. Seja $w_1 = v_1 + 2v_3$ e $w_2 = 7v_1 - 3v_3$. Prove que $\{w_1, w_2\}$ é linearmente independente.

FIM