Ano Lectivo 2017/2018
21 de Novembro de 2017
Duração: 45 minutos

RESOLUÇÃO DO TESTE 2 DE ÁLGEBRA LINEAR

MEAmbi - MEBiol

1. (a) Para $\alpha^2-\alpha\neq 0$, $(0,0,0,0)\notin V_\alpha$ pelo que V_α não é subespaço linear. Para $\alpha^2-\alpha=0$ (isto é, $\alpha=0$ ou $\alpha=1$), V_α é subespaço linear de $\mathbb{R}^4$ porque $V_{\boldsymbol{\alpha}}=\mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & 2\\ \boldsymbol{\alpha} & 1 & -3 & 2\end{bmatrix}\right)$.

   (b) $V_0=\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4 : y-3z+2w=0,\ y-3z+2w=0\}=\{(x,3z-2w,z,w)\in\mathbb{R}^4 : x,z,w\in\mathbb{R}\}$. Como $\dim(V_0)=\dim(\mathcal{N}(A))=3$ onde $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & 2\\ 0 & 1 & -3 & 2\end{bmatrix}$ e

$$(x,3z-2w,z,w)=x(1,0,0,0)+z(0,3,1,0)+w(0,-2,0,1)$$

   concluímos que $\{(1,0,0,0),(0,3,1,0),(0,-1,0,1)\}$ é uma base de V_0.

   (c) Um tal base é dada por uma base do espaço das colunas de $B=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0\\ 3 & 0 & 3 & -2\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$, uma vez que $V_0=\mathcal{C}(B)$. Usando eliminação de Gauss $B\xrightarrow[-L_1+3]{-3L_1+L_2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 3 & -2\\ 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 3 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=U$ e como os pivôs estão na 1^a, 2^a e 4^a colunas, uma tal base de V_0 é:

$$\{(1,3,1,0),(1,0,0,0),(0,-2,0,1)\}.$$

   (d) Como $V_1\subset V_0$, $V_0+V_1=V_0$, pelo que $\dim(V_0+V_1)=3$.

2. Como $S_{\mathcal{B}_2\to\mathcal{B}_1}\begin{bmatrix}-2\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 3\end{bmatrix}$, $p(t)=0(1-t)+3(2t+t^2)=6t+3t^2$.

3. Sejam α_1,α_2 tais que $\alpha_1 w_1+\alpha_2 w_2=0$. Queremos provar que $\alpha_1=\alpha_2=0$. Usando a definição de w_1 e w_2 temos:

$$\alpha_1 w_1+\alpha_2 w_2=\alpha_1(v_1+2v_3)+\alpha_2(7v_1-3v_3)=(\alpha_1+7\alpha_2)v_1+(2\alpha_1-3\alpha_2)v_3=0.$$

   Como $\{v_1,v_3\}$ é L.I. (pois $\{v_1,v_2,v_3\}$ é L.I.), podemos concluir que $\alpha_1+7\alpha_2=0$ e $2\alpha_1-3\alpha_2=0$. Como este sistema é determinado (a matriz dos coeficientes é invertível), $\alpha_1=\alpha_2=0$, o que nos leva a concluir que $\{w_1,w_2\}$ é L.I..