Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Ano Lectivo 2017/2018
17 de Outubro de 2017
Duração: 45 minutos

RESOLUÇÃO DO TESTE 1 DE ÁLGEBRA LINEAR

MEAmbi - MEBiol

1. (a) O equilibrio da reação química é dado pelo sistema de equações lineares $\begin{cases} x-6z=0 & \text{(Ferro)} \\ 2x-w=0 & \text{(Enxofre)} \\ 2y-3z-2w=0 & \text{(Oxigénio)} \end{cases}$ cuja matriz aumentada é $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -6 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -2 & 0 \end{array}\right]$.

   (b) Usando operações elementares temos $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -6 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{-2L_1+L_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & -1 & 0 \end{array}\right]$. Podemos escolher w para variável livre e assim o conjunto solução é $\mathcal{S} = \{(\frac{1}{2}w, \frac{9}{8}w, \frac{1}{12}w, w) \in \mathbb{R}^4 : w \in \mathbb{R}\}$. Para $w = 24$, $(12, 27, 2, 24)$ é a solução com os menores inteiros.

   (c) Temos que determinar os termos independentes do sistema $\begin{cases} x-6z=b_1 \\ 2x-w=b_2 \\ 2y-3z-2w=b_3 \end{cases}$ tal que $(1,1,1,1)$ seja uma solução. Logo $b_1 = -5$, $b_2 = 1$ e $b_3 = -3$.

2. (a) Aplicando a fórmula de Lalace na 2^a coluna de A, $\det(A) = -\alpha \det \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 2 & \alpha \end{bmatrix} = -6\alpha(\alpha - 1)$.

   (b) $X = \det(-3AA^T)\left(\begin{bmatrix} \det(A) & 0 \\ 0 & 2\det(A) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}^{-1}\right)^T = \det(-3AA^T)\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} \det(A) & 0 \\ 0 & 2\det(A) \end{bmatrix}$
   $= (-3)^3\det(A)^3\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = (-3)^3\det(A)^3\begin{bmatrix} 4 & -7 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 18^3\alpha^3(\alpha-1)^3\begin{bmatrix} 4 & -14 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$.

   (c) Para $\alpha = 7$, a matriz A é invertível, pelo que A^{100} também é invertível. Portanto $\text{car}(A^{100}) = 3$.

3. Como A e B são invertíveis, podemos transformar A em I e B em I. Portanto podemos transformar I em B usando as operações inversas. Logo podemos transformar A em B, transformando A em I e depois I em B.

   Isto é: existem k operações elemantares (cujas matrizes elementares são E_1,..,E_k) e p operações elementares (cujas matrizes elementares são F_1,...,F_p) tais que

$$A \underset{E_1}{\longrightarrow} A_2 \underset{E_2}{\longrightarrow} \ldots \underset{E_{k-1}}{\longrightarrow} A_k \underset{E_k}{\longrightarrow} I \quad \text{e} \quad B \underset{F_1}{\longrightarrow} B_2 \underset{F_2}{\longrightarrow} \ldots \underset{F_{p-1}}{\longrightarrow} B_p \underset{F_p}{\longrightarrow} I$$

   Assim, podemos transformar A em B usando a seguinte sequência de operações elementares (note-se que a inversa de uma matriz elementar ainda é elementar):

$$A \underset{E_1}{\longrightarrow} A_2 \underset{E_2}{\longrightarrow} \ldots \underset{E_{k-1}}{\longrightarrow} A_k \underset{E_k}{\longrightarrow} I \underset{F_p^{-1}}{\longrightarrow} B_p \underset{F_{p-1}^{-1}}{\longrightarrow} \ldots \underset{F_1^{-1}}{\longrightarrow} B.$$