RESOLUÇÃO DO TESTE DE RECUPERAÇÃO DE ÁLGEBRA LINEAR

MEAmbi - MEBiol

I (T1 +T2 - 10 valores - 90 minutos)

1. (a) O equilibrio da reação química é dado pelo sistema de equações linear $\begin{cases} 3x - z = 0 & \text{(Carbono)} \\ 8x - 2w = 0 & \text{(Hidrogénio)} \\ 2y - 2z - w = 0 & \text{(Oxigénio)} \end{cases}$ cuja matriz aumentada é $\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right]$.

(b) Usando operações elementares temos $\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{-\frac{8}{3}L_1+L_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{8}{3} & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{8}{3} & -2 & 0 \end{array}\right]$. Podemos escolher w para variável livre e assim o conjunto solução é $\mathcal{S}_0 = \{(\frac{1}{4}w, \frac{5}{4}w, \frac{3}{4}w, w) \in \mathbb{R}^4 : w \in \mathbb{R}\}$. Para $w = 4$, $(1, 5, 3, 4)$ é a solução com os menores inteiros.

(c) $(1, -2, 0, 2) \in \mathcal{S}$ sse $(1, -2, 0, 2) - (1, 1, 1, 1) \in \mathcal{S}_0$. Por b), $(1, -2, 0, 2) - (1, 1, 1, 1) = (0, -3, -1, 1) \notin \mathcal{S}_0$, pelo que $(1, -2, 0, 2) \notin \mathcal{S}$.

2. (a) Usando operações elementares: $A \xrightarrow{-2L_1+L_2} \begin{bmatrix} a & 1 & 2 \\ 2a+1 & b+2 & 2-c \\ 1 & 2 & c \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{2}L_3} \begin{bmatrix} a & 1 & 2 \\ 2a+1 & b+2 & 2-c \\ -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{c}{2} \end{bmatrix}$,

pelo que $\det \begin{bmatrix} a & 1 & 2 \\ 2a+1 & b+2 & 2-c \\ -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{c}{2} \end{bmatrix} = -\frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} a & 1 & 2 \\ 2a+1 & b+2 & 2-c \\ 1 & 2 & c \end{bmatrix} = -\frac{1}{2} \det(A) = -1$

(b) $(A^T)^{-1}_{(1,21)} = (A^{-1})^T_{(1,2)} = A^{-1}_{(2,1)} = \frac{(-1)^{2+1}\mathrm{cof}(A)_{(1,2)}}{\det(A)} = \frac{-\det\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & c \end{bmatrix}}{\det(A)} = \frac{2-c}{2}$.

(c) A equação é equivalente a: $X \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \det(-A) \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$, pelo que $X = \begin{bmatrix} 0 & \det(-A) \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}^{-1} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} + I = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 7 & -2 \end{bmatrix} + I = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ 7 & -1 \end{bmatrix}$.

3. (a) $(x, y, z, w) \in U$ sse $(x, y, z, w)=(-w, z, z, w)=w(-1, 0, 0, 1)+y(0, 1, 1, 0)$ e $(-1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0)$ são lineramente independentes, $\dim(U) = 2$. Relativamente a V: $(1, 2, 2, -1), (0, 1, 1, 0), (a, a, a, a)$ são linearmente independentes sse $a \neq 0$, logo $\dim(V) = 3$ se $a \neq 0$ e $\dim(V) = 2$ se $a = 0$.

(b) Considere-se a base ordenada $\mathcal{B} = \{(-1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0)\}$ de U. Pretendemos escalares α_1 e α_2 tais que $(3, 3, 3, -3) = \alpha_1(-1, 0, 0, 1) + \alpha_2(0, 1, 1, 0)$. É óbvio que $\alpha_1 = -3$ e $\alpha_2 = 3$ e portanto $(3, 3, 3, -3)_{\mathcal{B}} = (-3, 3)$.

(c) Sim: $U \subset V$ para qualquer a, pois $(-1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0)$ geram U e pertencem a V. Por a), $U = V$ sse $a = 0$.

(d) Pelo teorema das dimensões, $\dim(W) = 2$; uma base de W terá que ser constituida por 2 vectores não colineares e que não estejam em U. Por exemplo $(0, 0, 1, 0)$ e $(0, 0, 0, 1)$.

4. Como o conjunto é linearmente dependente, um dos vectores é combinação o linear dos outros 2. Por exemplo (os outros casos são análogos), se $v_1 + w$ é combinação linear de $v_2 + w$ e $v_3 + w$, então existem escalares a, b tais que $v_1 + w = a(v_2 + w) + b(v_3 + w)$. Logo $v_1 - av_2 - bv_3 = (-1 + a + b)w$. Se $-1+a+b=0$ então podemos concluir que $v_1 - av_2 - bv_3 = 0$ o que implica que v_1, v_2, v_3 sejam linearmente dependentes, contradizendo a hipótese. Logo $-1 + a + b \neq 0$ e $w = \frac{v_1 - av_2 - bv_3}{-1+a+b} \in L(\{v_1, v_2, v_3\})$.

II (T3 - 10 valores - 90 minutos)

1. (a) $\lambda = 0$ é valor próprio de A pois A não é invertível. Como $\dim\mathcal{N}(A) = 3$, $\mathrm{mg}(0) = 3$. Portanto $3 \leq \mathrm{ma}(0) \leq 4$. Como $\mathrm{tr}(A) = 0$, $\mathrm{ma}(0) = 4$. (Em alternativa, podemos calcular o plonómio característica e concluir que $p(\lambda) = \lambda^4$).

   (b) $E(0) = \mathcal{N}(A) = \mathcal{N}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z + w = 0\}$. Logo $\{(-1, 1, 0, 0), (-1, 0, 1, 0), (-1, 0, 0, 1)\}$ é uma base de $E(0)$.

   (c) A matriz A não é diagonalizável (logo não é ortogonalmente diagonalizável) porque $\mathrm{ma}(0) \neq \mathrm{mg}(0)$.

2. (a) Note-se que $(2, 1, 1) = (1, 1, 0) + (1, 0, 1)$ e que $(1, 1, 0), (1, 0, 1)$ são linearmente independentes, pelo que $\{(1, 1, 0), (1, 0, 1)\}$ é uma base de V. Como $(1, 0, 0)$ não é combinação linear de $(1, 1, 0)$ e $(1, 0, 1)$, $(1, 0, 0) \notin V$ e assim $\{(1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ não é uma base de V, embora os vectores sejam ortogonais.

   (b) $(x, y, z) \in V^\perp$ sse $\langle (x, y, z), (1, 1, 0) \rangle = 0$ e $\langle (x, y, z), (1, 0, 1) \rangle = 0$. Ora, $\langle (x, y, z), (1, 1, 0) \rangle = 3y$ e $\langle (x, y, z), (1, 0, 1) \rangle = x - y + z$, portanto $(x, y, z) \in V^\perp$ sse $y = 0$ e $x = -z$. Logo $\{(-1, 0, 1)\}$ é uma base de $V^\perp$.

   (c) Como $(1, 1, 1)$ não é combinação linear de $(1, 1, 0)$ e $(1, 0, 1)$, pois $\mathrm{car}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 3$, $U + V = \mathbb{R}^3$. Portanto $(U + V)^\perp = \{(0, 0, 0)\}$. Portanto $\mathrm{d}((0, 0, 1), U + V) = 0$.

3. (a) Como $1 \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{1}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \mathbf{1}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $t \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{1}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \mathbf{0}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $M(T; \mathcal{B}_1; \mathcal{B}_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

   (b) Seja $A = M(T; \mathcal{B}_1; \mathcal{B}_2)$. Como $\mathrm{car}(A) = 2$, $\dim\mathcal{N}(T) = 0$ e portanto T é injectiva. Por outro lado, $\mathrm{car}(A) = \dim(\text{Espaço de Chegada})$, portanto T é sobrejectiva.

   (c) Seja $\mathcal{B}_3 = \{C_1, C_2\}$ e $S = S_{\mathcal{B}_2 \to \mathcal{B}_3}$. Então $SA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Logo $S = A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. Assim $A = S_{\mathcal{B}_3 \to \mathcal{B}_2}$, logo $C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $C_2 = 0\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

4. Seja u vector próprio de A^2 associado ao valor próprio $\lambda \in \mathbb{C}$ (isto é, $u \neq 0$ é tal que $A^2 u = \lambda u$). Assim

$$\lambda ||u||^2 = \lambda \langle u, u \rangle = \langle \lambda u, u \rangle = \langle A^2 u, u \rangle = \langle A(Au), u, \rangle = \langle Au, A^T u, \rangle = \langle Au, -Au \rangle = -\langle Au, Au \rangle = -||Au||^2$$

onde se usou o facto de $A^T = -A$ na 6^a igualdade. Logo $\lambda ||u||^2 = -||Au||^2$, pelo que $\lambda \leq 0$.