Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

1^o Semestre 2017/2018
17 de Janeiro de 2018
Duração: 90 + 90 minutos

TESTE DE RECUPERAÇÃO DE ÁLGEBRA LINEAR

MEAmbi - MEBiol

I (T1+T2 - 10 valores - 90 minutos)

1. Considere a seguinte equação química:

$$x\,\mathrm{C_3H_8}\; + y\,\mathrm{O_2} \longrightarrow z\,\mathrm{CO_2}\; + w\,\mathrm{H_20}.$$

   (a) (0.5) Escreva a matriz aumentada de um sistema de equações lineares que equilibre a equação química.

   (b) (1.0) Determine o conjunto solução do sistema de equações lineares de (a) e obtenha os menores inteiros positivos que equilibram a reação.

   (c) (1.0) Seja $\mathcal{S}$ o conjunto solução de um sistema de equações lineares tal que o sistema homogéneo associado seja igual ao de (a) e que $(1,1,1,1) \in \mathcal{S}$. Verifique se $(1,-2,0,2) \in \mathcal{S}$.

2. Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $A = \begin{bmatrix} a & 1 & 2 \\ 1 & b & 2 \\ 1 & 2 & c \end{bmatrix}$ tais que $\det(A) = 2$.

   (a) (1.0) Calcule $\det \begin{bmatrix} a & 1 & 2 \\ 2a+1 & b+2 & 6 \\ -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{c}{2} \end{bmatrix}$.

   (b) (1.0) Determine a entada $(1,2)$ da inversa da matriz A^T.

   (c) (1.0) Determine a matriz X tal que $X \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \det(-A) \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

3. Sejam $U = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x + w = 0, y = z\}$ e $V = L\left(\{(1,2,2,-1),(0,1,1,0),(a,a,a,a)\}\right)$, com $a \in \mathbb{R}$.

   (a) (1.0) Calcule $\dim(U)$ e $\dim(V)$ para cada a.

   (b) (1.0) Determine as coordenadas de $(3,3,3,-3)$ numa base ordenada de U à sua escolha.

   (c) (1.0) Encontre um espaço linear W tal que $U + W = \mathbb{R}^4$ e $U \cap W = \{(0,0,0,0)\}$.

   (d) (0.5) Verifique se $U \subset V$ para qualquer a. Determine o(s) valor(es) de a tal que $U = V$.

4. (1.0) Num espaço linear V, seja $\{v_1, v_2, v_3\}$ um conjunto de vectores linearmente independentes e $w \in V$ tal que $\{v_1+w, v_2+w, v_3+w\}$ seja linearmente dependente. Prove que $w \in L(\{v_1, v_2, v_3\})$.

II (T3 - 10 valores - 90 minutos)

1. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

   (a) (1.0) Prove que $\lambda = 0$ é o único valor próprio de A.

   (b) (1.0) Encontre uma base para o espaço próprio de A associado ao valor próprio $\lambda = 0$.

   (c) (1.0) Verifique se A é diagonalizável ou ortogonalmente diagonalizável.

2. Considere $\mathbb{R}^3$ munido com o produto interno definido por:

$$\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 4x_2y_2 + x_3y_3$$

   e seja $V = L(\{(1,1,0),(1,0,1),(2,1,1)\})$.

   (a) (1.0) Verifique se $\{(1,1,0),(1,0,0)\}$ é uma base ortogonal de V.

   (b) (1.0) Encontre uma base para $V^{\perp}$.

   (c) (1.0) Calcule a distância entre $(0,0,1)$ e $U + V$, onde $U = L(\{(1,1,1)\})$.

3. Seja $\mathcal{B}_1 = \{1, t\}$ a base canónica do espaço linear real $\mathcal{P}_1$ dos polinómios de grau menor ou igual a 1 na variável t. Considere o subespaço linear V de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tal que $\mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ seja uma base ordenada de V. Considere a transformação linear $T : \mathcal{P}_1 \to V$ definida por

$$T(p(t)) = \begin{bmatrix} p(0) & p(1) \\ p(1) & p(0) \end{bmatrix}, \quad \text{onde } p(t) \in \mathcal{P}_1.$$

   (a) (1.0) Encontre a matriz $M(T; \mathcal{B}_1; \mathcal{B}_2)$ que representa T nas bases $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$.

   (b) (1.0) Verifique se T é sobrejectiva ou injectiva.

   (c) (1.0) Determine uma base $\mathcal{B}_3$ de V tal que $M(T; \mathcal{B}_1; \mathcal{B}_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

4. (1.0) Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ anti-simétrica e λ um valor próprio de A^2. Prove que $\lambda \leq 0$.

FIM