RESOLUÇÃO DO TESTE 3 DE ÁLGEBRA LINEAR

MEAmbi - MEBiol

1. (a) $p(\lambda)=\det(A-\lambda I)=\det\begin{bmatrix}3-\lambda & 1 & 1\\ 0 & 3-\lambda & 0\\ 0 & -2 & 1-\lambda\end{bmatrix}=(3-\lambda)\det\begin{bmatrix}3-\lambda & 0\\ -2 & 1-\lambda\end{bmatrix}=(1-\lambda)(3-\lambda)^2$.
Logo $\lambda_1=1$ e $\lambda_2=3$ são os valores próprios de A, com $\mathrm{ma}(\lambda_1)=1$ e $\mathrm{ma}(\lambda_2)=2$.

   (b) $E_{\lambda_1}=\mathcal{N}(A-\lambda_1 I)=\mathcal{N}\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 0\end{bmatrix}$, pelo que $\{(1,0,-2\}$ é uma base para E_{λ_1}. Por outro lado, $E_{\lambda_2}=\mathcal{N}(A-\lambda_2 I)=\mathcal{N}\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & -2 & -2\end{bmatrix}$, pelo que $\{(1,0,0),(0,1,-1)\}$ é uma base para E_{λ_2}. Como $\mathrm{ma}(\lambda_1)=\mathrm{mg}(\lambda_1)$ e $\mathrm{ma}(\lambda_2)=\mathrm{mg}(\lambda_2)$, A é diagonalizável tendo-se $D=S^{-1}AS$ com $D=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$ e $S=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -2 & 0 & -1\end{bmatrix}$.

2. (a) Seja $\mathcal{B}_1=\{v_1,v_2\}$, $\mathcal{B}_2=\{w_1,w_2,w_3\}$ e $A=M(T;\mathcal{B}_1;\mathcal{B}_2)$. Como $\mathrm{car}(A)=2$, $\dim(\mathcal{N}(A))=0$ pelo que T é injectiva. O conjunto $\{(2,3,0),(3,4,0)\}$ é uma base para $\mathcal{C}(A)$, pelo que $\{2w_1+3w_2+0w_3, 3w_1+4w_2+0w_3\}=\{5+3t,7+4t\}$ é uma base para $\mathcal{I}(T)$.

   (b) Seja $\mathbf{B}=\{v_1',v_2'\}$ e $S_{\mathbf{B}\to\mathcal{B}_1}=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$. Então $B=AS_{\mathbf{B}\to\mathcal{B}_1}$ e portanto $\begin{bmatrix}0 & 2\\ 1 & 3\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2a+3c & 2b+3d\\ 3a+4c & 3b+4d\\ 0 & 0\end{bmatrix}$.
Resolvendo os sistemas lineares, obtém-se $S_{\mathbf{B}\to\mathcal{B}_1}=\begin{bmatrix}3 & 1\\ -2 & 0\end{bmatrix}$. Assim, $v_1'=3v_1-2v_2=(1,-3)$ e $v_2'=1v_1+0v_2=(1,1)$.

   (c) Notemos que T não é sobrejectiva e de facto $1+t+t^2=w_3\notin\mathcal{I}$, portanto a equação linear é impossível, logo $\mathcal{S}=\emptyset$.

3. (a) Notemos que $\{u_1,u_2\}$ é uma base de U. Como $\langle u_1,u_2\rangle=0$, $\{u_1,u_2\}$ é uma base ortogonal de U.

   (b) Como $U^\perp=\mathcal{N}\begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 1 & 0 & 2\end{bmatrix}=\{(x,y,z,w,t)\in\mathbb{R}^5 : y=z+2t, x=-2z-5t\}$,
$\{(-2,1,1,0,0),(0,0,0,1,0),(-5,2,0,0,1)\}$ é uma base de $U^\perp$.

   (c) Seja $p=(4,1,1,1,0)$. Então $d\left(p,U^\perp\right)=||P_U(p)||=||$. Ora, por a),
$P_U(p)=\frac{\langle p,u_1\rangle}{\langle u_1,u_1\rangle}u_1+\frac{\langle p,u_2\rangle}{\langle u_2,u_2\rangle}u_2=u_1$, portanto $d\left(p,U^\perp\right)=||u_1||=\sqrt{6}$.

4. (a) (1.0) A matriz A é ortogonalmente diagonalizável porque A é real e simétrica ($A=A^T$).

   (b) (1.0) Note-se que $Au=(I-\alpha uu^T)u=Iu-\alpha u(u^Tu)=Iu-\alpha u=(1-\alpha)u$, pelo que $u\neq 0$ é um vector próprio de A e $\lambda_1=1-\alpha$ é o valor próprio associado. Seja agora $v\in\{u\}^\perp$ não nulo (usando o produto interno usual). Então $Av=(I-\alpha uu^T)v=Iv-\alpha u(u^Tv)=v$, pois $0=\langle u,v\rangle=u^Tv$. Portanto v é um vector próprio de A e $\lambda_2=1$ é o valor próprio associado. Além disso, $\dim(\{u\}^\perp)=n-1$ (para $n\geq 2$). Logo $\mathrm{mg}(\lambda_2)=n-1$, $\mathrm{mg}(\lambda_1)=1$ e $p(\lambda)=(1-\lambda)^{n-1}(1-\alpha-\lambda)$, para $\alpha\neq 0$. Se $\alpha=0$, $\lambda_1=\lambda_2$ e $p(\lambda)=(1-\lambda)^n$ (neste caso, $A=I$).