RESOLUÇÃO DO TESTE 2 DE ÁLGEBRA LINEAR

MEAmbi - MEBiol

1. Usando operações elementares temos $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & \alpha^2-1 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 246 \end{bmatrix} \xrightarrow[-2L_1+L_4]{-5L_1+L_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 0 & 0 & \alpha^2-1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 238 \end{bmatrix}$.

   (a) As colunas de A geram $\mathbb{R}^4$ sse $\mathrm{car}(A) = 4$ sse $\alpha \notin \{\pm 1\}$.

   (b) Para $\alpha = -1$, $\mathcal{N}(A) = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x+2y+3z+4z+w = 0, -4y-8z-12w = 0, 238w = 0\} = \{(z, -2z, z, 0) \in \mathbb{R}^4 : \ z \in \mathbb{R}\}$, pelo que $\{(1, -2, 1, 0)\}$ é uma base para $\mathcal{N}(A)$.

   (c) Para $\alpha = 1$, $\{(1, 5, 0, 2), (2, 6, 0, 4), (4, 8, 3, 246)\}$ é uma base para $\mathcal{C}(A)$.

   (d) Para $\alpha = 0$, a matriz A é invertível portanto A^6 também é invertível. Logo $\mathcal{N}(A^6) = \{(0, 0, 0, 0)\}$. Portanto $\dim(\mathcal{C}(A^3) \cap \mathcal{N}(A^6)) = 0$.

2. (a) Como $p_1 = 5q_1+7q_2$, $q_2(t) = \frac{1}{7}(p_1(t)-5q_1(t)) = \frac{1}{7}\left(t + t^2 - 5(7 + 10t + 3t^2)\right) = -5-7t-2t^2$. Por outro lado, $p_2 = 3q_1 + aq_2$, pelo que substituindo, $1+2t+t^2 = 3(7+10t+3t^2)+\mathbf{a}(-5-7t-2t^2)$. Logo $\mathbf{a} = 4$.

   (b) Como $\dim(V) = 2$, basta encontrar um vector $r(t)$ em V tal que $\{1 + 3t + 2t^2, r(t)\}$ seja um conjunto linearmente independente, ou seja, $p(t)$ e $r(t)$ não colineares. P. ex., $r(t) = p_1(t)$.

3. A afirmação é verdadeira. Seja $v \in V_2$. Queremos provar que $v \in V_1$. Ora, como por hipótese $V_1 = V_1 + V_2$, basta provar que v pode ser escrito na forma $v_1 + v_2$ para alguns $v_1 \in V_1$ e $v_2 \in V_2$. Isto é claro pois $v = 0 + v$ (i.e. definir $v_1 = 0$ e $v_2 = v$).