Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

1^o Semestre 2015/2016
20 de Novembro de 2015
Duração: 45 minutos

2^o TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR
MEAmbi - MEBiol

1. Para cada real α, considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & \alpha^2 - 1 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 246 \end{bmatrix}.$$

   (a) (1.0) Para que valores de α as colunas de A geram $\mathbb{R}^4$?

   (b) (1.0) Para $\alpha = -1$, determine uma base para $\mathcal{N}(A)$.

   (c) (0.5) Para $\alpha = 1$, determine uma base para $\mathcal{C}(A)$.

   (d) (0.5) Para $\alpha = 0$, calcule $\dim(\mathcal{C}(A^3) \cap \mathcal{N}(A^6))$.

2. Sejam $V = \{p \in \mathcal{P}_2 : \; p(-1) = 0\}$ espaço linear, $\mathcal{B}_1 = \{p_1, p_2\}$ e $\mathcal{B}_2 = \{q_1, q_2\}$ bases ordenadas de V, onde $p_1(t) = t + t^2$, $p_2(t) = 1 + 2t + t^2$ e $q_1(t) = 7 + 10t + 3t^2$. Seja ainda $\mathbf{a}$ tal que a matriz de mudança da base $\mathcal{B}_1$ para $\mathcal{B}_2$ é

$$S_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 7 & \mathbf{a} \end{bmatrix}.$$

   (a) (1.0) Determine o escalar $\mathbf{a}$.

   (b) (0.5) Encontre uma base de V que inclua o polinómio $p(t) = 1 + 3t + 2t^2$.

3. (0.5) Sejam V_1 e V_2 subespaços lineares de um espaço linear V. Considere a seguinte afirmação:

Se $V_1 = V_1 + V_2$, então $V_2 \subseteq V_1$.

Se verdadeira, prove a afirmação. Se falsa, ilustre com exemplos.

FIM