Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

1^o Semestre 2015/2016
16 de Outubro de 2015
Duração: 45 minutos

1^o TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR

MEAmbi - MEBiol

1. Para cada α e cada β em $\mathbb{R}$, considere o sistema de equações lineares de variáveis reais cuja matriz aumentada é dada por:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ \alpha & 3 & 2 & 2\beta \\ 2 & 2 & \alpha+1 & \beta \end{array}\right].$$

   (a) (1.0) Identifique os valores de α e β para os quais o sistema de equações lineares anterior é possível e indeterminado.

   (b) (1.0) Para $\alpha = 3$ e $\beta = \frac{8}{3}$, determine o conjunto solução do sistema de equações lineares correspondente.

2. (0.5) Sejam $A = [a_{i,j}]$ e $B = [b_{i,j}]$ as matrizes 100×100 tais que $a_{i,j} = i^2$ e $b_{i,j} = (-1)^{i+j}$ para quaisquer $i, j \in \{1, ..., 100\}$. Calcule AB.

3. Sejam $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & -4 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 3 \\ -8 & 1 & 0 & 10 \end{bmatrix}$.

   (a) (1.0) Calcule a entrada $(4, 3)$ de inversa de A.

   (b) (1.0) Determine a matriz $\mathbf{X}$ tal que $(\mathbf{X} + 2I)A^{-1} = B + \det(-A^{-1}A^T)A^{-1}$.

4. (0.5) Seja $A \in \mathcal{M}_{3\times3}(\mathbb{Z})$ matriz com entradas em $\mathbb{Z}$ tal que $\det(A) = 1$. Prove que $A^{-1} \in \mathcal{M}_{3\times3}(\mathbb{Z})$, isto é, prove que as entradas de A^{-1} estão todas em $\mathbb{Z}$.

FIM