Instituto Superior Técnico — Ano Lectivo 2014/2015

Departamento de Matemática — 20 de Dezembro de 2014

RESOLUÇÃO DO TESTE 3 DE ÁLGEBRA LINEAR

CURSO: Engenharia Aeroespacial

1. (a) Como $Au_1 = 6u_1$, $Au_2 = 9u_2$ e $Au_3 = 9u_3$, $Au_4 = 6u_1 + 9u_2$, u_1, u_2 e u_3 são vectores são vectores próprios de A e u_4 não é vector próprio.

   (b) Por a), $\lambda_1 = 6$ e $\lambda_2 = 9$ são valores próprios de A tais que $\text{ma}(\lambda_1) \geq 1$ e $\text{ma}(\lambda_2) \geq 2$. Como A tem 3 valores próprios, $\lambda_1 = 6$ e $\lambda_2 = 9$ são **os** valores próprios de A e $\text{ma}(\lambda_1) = 1$ e $\text{ma}(\lambda_2) = 2$. Novamente por a), A é diagonalizável, pois $\text{mg}(\lambda_1)$=$\text{ma}(\lambda_1)$=1 e $\text{mg}(\lambda_2)$=$\text{ma}(\lambda_2)$=2 e:

$$D = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

   (c) Aplicando o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt à base $\{u_2, u_3\}$ de $E(\lambda_2) = \mathcal{N}(A - 9I)$ obtém-se uma tal base $\{v_1, v_2\}$ ortogonal, onde $v_1 = u_2 = (1, 0, 3)$ e

$$v_2 = u_3 - \frac{\langle u_3, u_2\rangle}{\langle u_2, u_2\rangle}\, u_2 = (0, 1, -2) - \frac{-6}{10}\,(1, 0, 3) = (\frac{3}{5}, 1, -\frac{1}{5}).$$

   Como $\mathcal{N}(A - 9I)^{\perp}$=$\mathcal{L}(A - 9I)$=$\mathcal{L}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \end{bmatrix}$, $\{(3, -2, -1)\}$ é uma base de $\mathcal{N}(A - 9I)^{\perp}$.

   (d) $\text{dist}((0, 6, 2), \mathcal{N}(A - 9I))$=$||P_{\mathcal{N}(A-9I)^{\perp}}(0, 6, 2)||$=$||\frac{\langle(0,6,2),(3,-2,-1)\rangle}{\langle(3,-2,-1),(3,-2,-1)\rangle}(3, -2, -1)||$=$||(3, -2, -1)|| = \sqrt{14}$.

   (e) O referido sistema de equações diferenciais pode ser escrito na forma matricial $\mathtt{x}' = A\mathtt{x}$. Como A é diagonalizável, $\mathtt{x}$ é solução de $\mathtt{x}' = A\mathtt{x}$ sse existirem constantes c_1, c_2 e c_3:

$$\mathtt{x}(t) = \begin{bmatrix} \mathtt{x}_1(t) \\ \mathtt{x}_2(t) \\ \mathtt{x}_3(t) \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ c_2 e^{\lambda_2 t} \\ c_3 e^{\lambda_3 t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 e^{6t} \\ c_2 e^{9t} \\ c_3 e^{9t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_2 e^{9t} \\ c_1 e^{6t} + c_3 e^{9t} \\ c_1 e^{6t} + 3c_2 e^{9t} - 2c_3 e^{9t} \end{bmatrix}.$$

2. (a) $T\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\right) = T\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = 1(1 - t) + 2(1 - t) + 1(1 + t) = 4 - 2t.$

   (b) Como 2=car(A)=dim (Espaço de chegada), T é sobrejectiva. Uma vez que $\{(-4, 1, 1)\}$ é uma base de $\mathcal{N}(A)$, $\{-4\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\}$, i.e. $\{\begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\}$, é uma base de $\mathcal{N}(T)$.

   (c) Por a), $T\left(\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\right) = -4 + 2t$, pelo que a $A \in U$ é solução de $T(A) = -4 + 2t$ se e só se

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \qquad \text{com } \alpha \in \mathbb{R}.$$

   (d) Note-se que $M\left((T \circ R)^{-1}, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_2\right) = \left(BB^T\right)^{-1}$=$\begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1}$=$\begin{bmatrix} \frac{1}{9} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$. Dado $p(t) = a + bt \in \mathcal{P}_1$, com $a, b \in \mathbb{R}$, temos que $p(t) = \frac{a-b}{2}(1 - t) + \frac{a+b}{2}(1 + t)$. Portanto $(T \circ R)^{-1}(p(t))) =$

$$\frac{a-b}{2}(T \circ R)^{-1}((1 - t)) + \frac{a+b}{2}(T \circ R)^{-1}((1 + t))=\frac{a-b}{2}\frac{1}{9}(1 - t) + \frac{a+b}{2}\frac{1}{2}(1 + t)=\frac{11a + 7b}{36} + \frac{7a + 11b}{36}\ t.$$

3. Sendo A normal, existem matrizes U unitária e D=diag$(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ diagonal tais que $A = U^*DU$. Logo $A^* = U^*D^*U$, pelo que $A + A^* = U^*(D + D^*)U$. Portanto $A + A^*$ e a matriz diagonal $D + D^*$=diag$(\lambda_1 + \overline{\lambda_1}, ..., \lambda_n + \overline{\lambda_n})$ têm os mesmos valores próprios.