Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

1^o Semestre 2014/2015
20 de Dezembro de 2014
Duração: 90 minutos

3^o TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR

CURSO: Engenharia Aeroespacial

1. Seja $\mathbb{R}^3$ munido com o produto interno usual, $u_1 = (0,1,1)$, $u_2 = (1,0,3)$, $u_3 = (0,1,-2)$, $u_4{=}u_1 + u_2$ e

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & -1 \\ 3 & -2 & 8 \end{bmatrix}.$$

   (a) (1.0) Verifique se u_1, u_2, u_3 e u_4 são vectores próprios de A.

   (b) (1.0) Prove que A é diagonalizável e determine uma matriz diagonal D e uma matriz invertível P tais que $D = P^{-1}AP$.

   (c) (1.0) Determine uma base ortogonal para $\mathcal{N}(A - 9I)$ e uma base ortogonal para $\mathcal{N}(A - 9I)^{\perp}$.

   (d) (1.0) Calcule a distância entre $(0,6,2)$ e $\mathcal{N}(A - 9I)$.

   (e) (1.0) Determine o conjunto das soluções do seguinte sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} \mathrm{x}_1'(t) = 9\mathrm{x}_1(t) \\ \mathrm{x}_2'(t) = 3\mathrm{x}_1(t) + 7\mathrm{x}_2(t) - \mathrm{x}_3(t) \\ \mathrm{x}_3'(t) = 3\mathrm{x}_1(t) - 2\mathrm{x}_2(t) + 8\mathrm{x}_3(t) \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

2. Seja $\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ uma base ordenada de $U{=}\{A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : \mathrm{tr}(A) = 0\}$ e $\mathcal{B}_2 = \{1-t, 1+t\}$ uma base ordenada de $\mathcal{P}_1$. Seja $T : U \to \mathcal{P}_1$ a transformação linear tal que

$$M(T;\mathcal{B}_1;\mathcal{B}_2) = B, \qquad \text{onde } B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

   (a) (1.0) Calcule $T\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\right)$.

   (b) (1.0) Verifique se T é sobrejectiva e determine uma base para $\mathcal{N}(T)$.

   (c) (1.0) Resolva, em U, a equação linear $T(A) = -4 + 2t$.

   (d) (1.0) Seja $R : \mathcal{P}_1 \to U$ transformação linear tal que $M(R;\mathcal{B}_2;\mathcal{B}_1) = B^T$. Calcule $(T \circ R)^{-1}(p(t))$, para todo o $p(t) \in \mathcal{P}_1$.

3. (1.0) Sejam $\lambda_1, ..., \lambda_n$ os valores próprios de $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ tal que A é matriz normal ($AA^* = A^*A$). Prove que $\lambda_1 + \overline{\lambda_1}, ..., \lambda_n + \overline{\lambda_n}$ são os valores próprios de $A + A^*$.

FIM