RESOLUÇÃO DO TESTE 2 DE ÁLGEBRA LINEAR

CURSO: Engenharia Aeroespacial

1. Usando operações elementares temos

$$[A|b] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & x \\ 1 & 1 & 2 & 1 & y \\ 3 & 3 & 6 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 0 & w \end{array}\right] \underset{-3L_1+L_3}{\xrightarrow{-L_1+L_2}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 1 & 1 & y-x \\ 0 & 3 & 3 & 1 & z-3x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & w \end{array}\right] \xrightarrow{-3L_2 \leftrightarrow L_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 1 & 1 & y-x \\ 0 & 0 & 0 & -2 & z-3y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & w \end{array}\right] .(*)$$

   (a) Como $V_1 = \mathcal{C}(A)$, $\dim(V_1) = \operatorname{car}(A) = 3$ e $\{(1,1,3,0),(0,1,3,0),(0,1,1,0)\}$ é uma base para V_1.

   (b) Como $(x,y,z,w) \in V_1$ se e só se o sistema linear $[A|b]$ fôr possível, $(*)$ implica que $V_1 = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : w = 0\}$.

   (c) Como $V_2 \subset V_1$, $V_1 \cup V_2 = V_1$, pelo que $V_1 \cup V_2$ é subespaço linear de $\mathbb{R}^4$ (pois V_1 é subespaço linear).

2. (a) Sendo $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $\operatorname{tr}(A)I = A - A^T$ é equivalente a: $a+d=0$ e $b-c=0$. Assim, $A = \begin{bmatrix} -d & c \\ c & d \end{bmatrix}$.
   Como,
$$\begin{bmatrix} -d & -c \\ c & d \end{bmatrix} = d \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$
   e os 2 vectores de $\mathcal{B}_1$ são linearmente independentes, $\mathcal{B}_1$ é uma base de U.

   (b) As coordenadas de A_1 em $\mathcal{B}_2$ são $(1,0)$, como $S_{\mathcal{B}_2 \to \mathcal{B}_1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{3} \end{bmatrix}$,
$$A_1 = \mathbf{1} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \mathbf{3} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. Por exemplo, em $V = \mathbb{R}^2$ considere-se: $V_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}, V_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$ e $V_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}$. Assim, $V_2 + V_3 = \mathbb{R}^2$ pelo que $V_1 \cap (V_2 + V_3) = \mathbf{V_1}$. Por outro lado, $V_1 \cap V_2 = \{(0,0)\}$ e $V_1 \cap V_3 = \{(0,0)\}$, pelo que $(V_1 \cap V_2) + (V_1 \cap V_3) = \{(\mathbf{0},\mathbf{0})\}$.