Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

1^o Semestre 2014/2015
19 de Novembro de 2014
Duração: 45 minutos

2^o TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR

CURSO: Engenharia Aeroespacial

1. Sejam V_1 e V_2 os seguintes subespaços lineares de $\mathbb{R}^4$:

$$V_1 = L(\{(1,1,3,0),(0,1,3,0),(1,2,6,0),(0,1,1,0)\})$$

e

$$V_2 = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : y - 3z + 4w = 0,\ w = 0\}.$$

   (a) (1.0) Calcule $\dim(V_1)$ e determine uma base para V_1.

   (b) (1.0) Descreva V_1 usando equações lineares homogéneas.

   (c) (0.5) Verifique se $V_1 \cup V_2$ é um subespaço linear de $\mathbb{R}^4$.

2. Seja $\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ e considere o subespaço linear U do espaço linear real $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ das matrizes 2×2:

$$U = \left\{ A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) :\ \operatorname{tr}(A)I = A - A^T \right\}.$$

   (a) (1.0) Prove que $\mathcal{B}_1$ é uma base de U.

   (b) (1.0) Seja $\mathcal{B}_2 = \{A_1, A_2\}$ outra base ordenada de U tal que a matriz mudança da base $\mathcal{B}_2$ para a base $\mathcal{B}_1$ seja dada por

$$S_{\mathcal{B}_2 \to \mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

   Determine a matriz A_1.

3. (0.5) Encontre um espaço linear V e exemplos de subespaços lineares V_1, V_2 e V_3 de V tais que

$$V_1 \cap (V_2 + V_3) \neq (V_1 \cap V_2) + (V_1 \cap V_3).$$

FIM