Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Ano Lectivo 2014/2015
15 de Outubro de 2014
Duração: 45 minutos

RESOLUÇÃO DO TESTE 1 DE ÁLGEBRA LINEAR

CURSO: Engenharia Aeroespacial

1. Usando operações elementares temos

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & -\alpha & \alpha & \alpha^2-9 \\ -3 & \alpha & \alpha & 9+\alpha-\alpha^2 \end{array}\right] \xrightarrow[L_1+L_3]{-L_1+L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -\alpha-3 & \alpha-3 & \alpha^2-9 \\ 0 & \alpha+3 & \alpha+3 & 9+\alpha-\alpha^2 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2+L_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -\alpha-3 & \alpha-3 & \alpha^2-9 \\ 0 & 0 & 2\alpha & \alpha \end{array}\right].$$

(a) Assim, pelo método de eliminação de Gauss temos que:
- para $\alpha \neq -3$ e $\alpha \neq 0$ o sistema é possível e determinado;
- para $\alpha = 0$ o sistema é possível e indeterminado;
- para $\alpha = -3$ o sistema é impossível.

(b) Para $\alpha = -3$ o sistema homogéneo é equivalente ao sistema: $\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \end{array}\right]$. O sistema é possível e indeterminado e podemos escolher y para a única variável livre; além disso, $z = 0$, $x = y$. Logo, o conjunto solução é

$$\mathcal{S} = \{(y, y, 0) \in \mathbb{R}^3 : y \in \mathbb{R}\}.$$

(c) Para $\alpha = 5$, A_5 é invertível, pelo que $(A_5)^{99}$ também é invertível. Logo $\mathrm{car}((A_5)^{99}) = 3$.

2. Comece por notar que $AA^T = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, logo AA^T é invertível e $\mathrm{tr}(AA^T) = 7$. Assima a equação do enunciado é equivalente a: $7^2 I - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} B\,(AA^T)^{-1} = \mathbf{0}$ que pode ser escrita $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} B\,(AA^T)^{-1} = 7^2 I$ pelo que

$$B = 49 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} AA^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = 49 \begin{bmatrix} 7 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

3. (a) Note que $\det(\mathrm{cof}A) = 8$. Aplicando determinantes à equação $A(\mathrm{cof}A)^T = \det(A)I$ obtém-se $\det(A)\det(\mathrm{cof}A) = \det(A)^4$ pelo que $\det(A)^3 = 8$. Logo $\det(A) = 2$.

(b) Como $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}(\mathrm{cof}A)^T$, $(A^{-1})_{(4,1)} = \frac{1}{2}$.

4. Sendo A real, $A\overline{\mathtt{x}} = \mathbf{0}$, pois $A\overline{\mathtt{x}} = \overline{A}\overline{\mathtt{x}} = \overline{A\mathtt{x}} = \overline{\mathbf{0}} = \mathbf{0}$. Podemos escrever $\mathtt{x} = \mathtt{a} + i\mathtt{b}$ com $\mathtt{a}$ e $\mathtt{b}$ matrizes reais com $\mathtt{a} \neq 0$ ou $\mathtt{b} \neq 0$, onde $i = \sqrt{-1}$.

Como $A\mathtt{x} = A\overline{\mathtt{x}} = \mathbf{0}$, $A(\mathtt{x} \pm \overline{\mathtt{x}}) = \mathbf{0}$; por outro lado $\mathtt{x} + \overline{\mathtt{x}} = 2\mathtt{a}$ e $\mathtt{x} - \overline{\mathtt{x}} = i2\mathtt{b}$, pelo que basta definir $\mathtt{y} = 2\mathtt{a}$ ou $\mathtt{y} = 2\mathtt{b}$ (um deles é não nulo porque $\mathtt{x} \neq 0$ e $A\mathtt{y} = \mathbf{0}$).