Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Ano Lectivo 2014/2015
14 de Janeiro de 2015
Duração: 90 + 90 minutos

RESOLUÇÃO DO TESTE DE RECUPERAÇÃO DE ÁLGEBRA LINEAR

CURSO: Engenharia Aeroespacial

I (T1 +T2 - 10 valores - 90 minutos)

1. (a) $A(9u+7v) = 9Au + 7Av = 9b + 7\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 18 \end{bmatrix}$.

   (b) Como A é 2×4, $\mathrm{car}(A) \leq 2$, pelo que $\dim \mathcal{N}(A) \geq 2$. Assim, o conjunto solução do sistema (possível) $A\mathbf{x} = b$ tem pelo menos duas variáveis livres. Logo $\{u + kv : \ k \in \mathbb{R}\}$ não é o conjunto solução do sistema linear $A\mathbf{x} = b$ (pois este conjunto tem uma variável livre).

2. (a) $\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & -3 \\ 1 & 0 & 5 & 0 \end{bmatrix} \underset{\substack{\text{F. Laplace} \\ \text{na 2ª coluna}}}{=} -\det \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 5 \\ 1 & 5 & 0 \end{bmatrix} \underset{\substack{\text{F. Laplace} \\ \text{na 3ª coluna}}}{=} \det \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} + 5\det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = 15 + 5(5-2) = 30.$

   (b) Note-se que $\det(C) = \det(D) = -\frac{1}{2}$, $C^{-1} = BD^{-1}B^{-1}$, logo $\mathrm{tr}(C^{-1})$=$\mathrm{tr}(D^{-1}) = 3$. Assim,

$$\det\left(B^2(B^T)^{-3}\ \mathrm{tr}(C^{-1})C\right) = \left(\mathrm{tr}(C^{-1})\right)^4 \det\left(B^2(B^T)^{-3}C\right) = 3^4 \det(B)^2 \det(B)^{-3} \det(C) = -\frac{3^4}{60}.$$

3. (a) Como $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_1+L_3]{2L_1+L_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, podemos concluir que p_1, p_2, p_3 não são linearmente independentes.

   (b) Pelos calculos efectuados em a), $\{p_1, p_3\}$ é uma base para V_1 e $\dim(V_1) = 2$. Dado $p(t) = a + bt + ct^2$, $p(t) \in V_2$ sse $p(-1) = a - b + c = 0$ e $p(1) = a + b + c = 0$. Assim $a = -c$ e $b = 0$, pelo que $p(t) = -c + ct^2 = c(-1+t^2)$. Portanto $\{-1+t^2\}$ é uma base de V_2 e $\dim(V_2) = 1$.

   (c) Como $\dim(\mathcal{P}_2) = 3$, para o conjunto ser uma base de $\mathcal{P}_2$ basta verificar que os 3 vectores $(1,-1,1), (-2,0,2), (0,0,1)$ são linearmente independentes – de facto são pois car $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$=3.
   É claro que $\{1 - t + t^2, t^2\} \subset V_1$ é uma base de V_1 e $\{-2+2t^2\} \subset V_2$ é uma base de V_2.

   (d) Por c), $V_1 + V_2 = \mathcal{P}_2$, pelo que $V_1 \cap V_2 = \{\mathbf{0}\}$. Logo podemos escolher uma qualquer matriz A, 3×3, invertível.

   (e) Note-se que $p_1(t) + p_2(t) + p_3(t) = -2 + 2t$. Pretende-se α, β, γ tais que

$$-2 + 2t = \alpha(1 - t + t^2) + \beta(-2 + 2t^2) + \gamma(t^2).$$

   Facilmente se conclui que $\alpha = -2$, $\beta = 0$ e $\gamma = 2$.

4. Sabemos que em geral $A \cdot \mathrm{adj}(A) = \det(A)I$. Vamos supor que $\mathrm{car}(A) = n-1$. Então car $(\mathrm{adj}(A) \geq 1$ (se a linha i de A é transformada na linha nula de uma matriz em escada em linhas U que se obtém de A, então $\mathrm{cof}(A)_{ir} \neq 0$ onde r é a coluna de A que corresponde à coluna de U sem pivô). Mais: $\dim\mathcal{N}(A) = 1$, A é não invertível, implicando $A \cdot \mathrm{adj}(A) = \mathbf{0}$. Em particular as colunas de $\mathrm{adj}(A)$ estão no núcleo de A, mas como $\dim\mathcal{N}(A) = 1$, as colunas de $\mathrm{adj}(A)$ têm de ser colineares 2 a 2. Conclusão: $\mathrm{car}(\mathrm{adj}(A)) = 1$.

II (T3 - 10 valores - 90 minutos)

1. (a) $\{(-1,1,1),(-1,1,3)\}$ é uma base de V (porque $(-1,1,1),(2,-2,2),(-1,1,3)$ são linearmente dependentes), logo $V^{\perp}=\mathcal{N}(A)$ onde $A=\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$. Assim $\{(1,1,0)\}$ é uma base para $V^{\perp}$.

   (b) $P_V(1,2,0) = (1,2,0) - P_{V^{\perp}}(1,2,0) = (1,2,0) - \frac{\langle (1,2,0),(1,1,0)\rangle}{\langle (1,1,0),(1,1,0)\rangle}(1,1,0) = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$.

   (c) $\text{dist}((1,2,0),V) = ||P_{V^{\perp}}(1,2,0)|| = ||\frac{3}{2}(1,1,0)|| = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

   (d) Por a), $V^{\perp} = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\right)$, logo $V = \mathcal{N}(A)$ com $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

2. (a) Vamos designar por F_1, F_2, F_3, F_4 os vectores da base $\mathcal{B}$. Como $T(F_1) = RF_1 = \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix} = aF_1 + cF_2 + 0F_3 + 0F_4$, $T(F_2) = RF_2 = \begin{bmatrix} b & 0 \\ d & 0 \end{bmatrix} = bF_1 + dF_2 + 0F_3 + 0F_4$, $T(F_3) = RF_3 = \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{bmatrix} = 0F_1 + 0F_2 + aF_3 + dF_4$ e $T(F_4) = RF_4 = \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{bmatrix} = 0F_1 + 0F_2 + bF_3 + dF_4$,
$$A := M(T;\mathcal{B};\mathcal{B}) = \begin{bmatrix} R & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & R \end{bmatrix}.$$

   (b) Como R invertível implica $\begin{bmatrix} R & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & R \end{bmatrix}$ invertível, concluí-se usando a) que T é bijectiva (injectiva e sobrejectiva). Como $T(X) = Y$ sse R$X = Y$ sse $X = R^{-1}Y$, $T^{-1}(X) = R^{-1}X$.

   (c) Sabemos que existe um escalar λ tal que $T(X) = \lambda X$, isto é, $RX = \lambda X$. Se c_1 e c_2 forem as colunas de X, Rc_1 e Rc_2 são as colunas de RX. Portanto, c_1 e c_2 (os não nulos) são vectores próprios de R associados ao mesmo valor próprio λ.
   Resolução alternativa: seja $X = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$. Logo $X_{\mathcal{B}} = (e,g,f,h)$, onde $X_{\mathcal{B}}$ designa as coordenadas de X em $\mathcal{B}$. Assim X é vector próprio de T associado a λ see (e,g,f,h) é vector próproio da mtriz A de a) associado a λ sse (e,g) e (f,h) são vectores próprios de R associados a λ (os não nulos).

   (d) As matrizes $\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ b_1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & a_1 \\ 0 & b_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ b_2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & a_1 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix}$ são vectores próprios de T (usando a resolução de c)). Como $(a_1,b_1),(a_2,b_2)$ são linearmente independentes em $\mathbb{R}^2$, facilmente se verifica que estas matrizes são linearmente independentes em $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Logo formam uma base de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ constituída por vectores próprios de T.

   (e) Sendo $p_T(\lambda)$ o polinómio característico de T, $p_R(\lambda)$ o polinómio característico de R e $p_A(\lambda)$ o polinómio característico de A, sabemos que $p_T(\lambda) = p_A(\lambda)$, pelo que por a), $p_T(\lambda) = (p_R(\lambda))^2$.

3. Se A é normal ($A^*A = AA^*$) então $(A^*A)^2 = A^*(AA^*)A = A^*A^*AA = (A^*)^2A^2$, donde $\text{tr}(A^*A)^2 = \text{tr}((A^*)^2A^2)$. Reciprocamente, vamos supor que $\text{tr}(A^*A)^2 = \text{tr}((A^*)^2A^2)$. Note-se que em geral $\text{tr}(XY) = \text{tr}(YX)$ (1) e que $\text{tr}(XX^*) = 0$ implica $X = \mathbf{0}$. Assim, para provar que A é normal basta verificar que $\text{tr}\left((A^*A - AA^*)(A^*A - AA^*)\right) = 0$. Ora
$$\text{tr}((A^*A - AA^*)(A^*A - AA^*)) = \text{tr}(A^*AA^*A - A^*A^*AA - AA^*A^*A + AA^*AA^*) \qquad (2).$$
Como
$$\begin{aligned} \text{tr}(A^*AA^*A) &= \text{tr}(A^*A)^2 \underset{\text{Hipótese}}{=} \text{tr}((A^*)^2A^2), \\ \text{tr}(A^*A^*AA) &= \text{tr}((A^*)^2A^2), \\ \text{tr}(AA^*A^*A) &\underset{\text{Usando (1)}}{=} \text{tr}(A^*A^*AA) = \text{tr}((A^*)^2A^2), \\ \text{tr}(AA^*AA^*) &\underset{\text{Usando (1)}}{=} \text{tr}(A^*AA^*A) = \text{tr}(A^*A)^2 \underset{\text{Hipótese}}{=} \text{tr}((A^*)^2A)^2), \end{aligned}$$
podemos concluir que de facto a equação (2) é igual a 0, como pretendido.