Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

1º Semestre 2014/2015
14 de Janeiro de 2015
Duração: 90 + 90 minutos

TESTE DE RECUPERAÇÃO DE ÁLGEBRA LINEAR

CURSO: Engenharia Aeroespacial

I (T1+T2 - 10 valores - 90 minutos)

1. Considere $A \in \mathcal{M}_{2\times 4}(\mathbb{R})$, $u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ tais que $Au = b$ e $Av = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

   (a) (1.0) Calcule $A(9u + 7v)$.

   (b) (1.0) Verifique se $\{u + kv : \ k \in \mathbb{R}\}$ é o conjunto solução do sistema linear $A\mathbf{x} = b$.

2. Sejam $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & -3 \\ 1 & 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}$ e $C = BDB^{-1}$ onde $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

   (a) (1.0) Calcule $\det(B)$.

   (b) (1.0) Calcule $\det\left(B^2(B^T)^{-3}\ \mathrm{tr}(C^{-1})\ C\right)$.

3. No espaço linear real $\mathcal{P}_2$ dos polinómios reais, na variável t, de grau menor ou igual a 2, seja $V_1 = L(\{p_1, p_2, p_3\})$ e $V_2 = \{p(t) \in \mathcal{P}_2 : p(-1) = 0,\ p(1) = 0\}$, onde $p_1(t) = 1 - t + t^2$, $p_2(t) = -2 + 2t - 2t^2$ e $p_3(t) = -1 + t + t^2$.

   (a) (1.0) Verifique se p_1, p_2, p_3 são vectores linearmente independentes.

   (b) (1.0) Determine bases para V_1 e para V_2 indicando as respectivas dimensões.

   (c) (1.0) Prove que $\mathcal{B} = \{1 - t + t^2, -2 + 2t^2, t^2\}$ é uma base de $\mathcal{P}_2$ que contém uma base de V_1 e uma base de V_2.

   (d) (1.0) Identifique uma matriz A tal que $V_1 \cap V_2 = \{p(t) = a + bt + ct^2 \in \mathcal{P}_2 : (a, b, c) \in \mathcal{N}(A)\}$.

   (e) (1.0) Determine as coordenadas de $p_1 + p_2 + p_3$ na base ordenada $\mathcal{B}$ de $\mathcal{P}_2$ da alínea c).

4. (1.0) Seja A matriz $n \times n$ com $n > 1$ e $\mathrm{adj}(A)$ a matriz adjunta de A (i.e. $\mathrm{adj}(A) = (\mathrm{cof}\ A)^T$). Prove que se $\mathrm{car}(A) = n - 1$ então $\mathrm{car}(\mathrm{adj}(A)) = 1$.

II (T3 - 10 valores - 90 minutos)

1. Seja $\mathbb{R}^3$ munido com o produto interno usual e $V = L(\{(-1,1,1),(2,-2,2),(-1,1,3)\})$.

   (a) (1.0) Determine uma base para $V^\perp$

   (b) (1.0) Encontre a projeção ortogonal de $(1,2,0)$ sobre V.

   (c) (1.0) Calcule a distância entre $(1,2,0)$ e V.

   (d) (1.0) Determine uma matriz A tal que $V = \mathcal{N}(A)$.

2. Seja $R = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ base ordenada de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Seja $T : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ a transformação linear definida por

$$T(X) = RX.$$

   (a) (1.0) Determine a representação matricial $M(T;\mathcal{B};\mathcal{B})$ de T na base $\mathcal{B}$.

   (b) (1.0) Prove que T é bijectiva se a matriz R for invertível. Nesse caso, calcule $T^{-1}(X)$.

   (c) (1.0) Mostre que se X é vector próprio de T, então as colunas não nulas de X são vectores próprios de R.

   (d) (1.0) Supondo que $\{(a_1,b_1),(a_2,b_2)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$ formada por vectores próprios de R, encontre uma base de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ formada por vectores próprios de T.

   (e) (1.0) Relacione o polinómio característico de T com o polinómio característico de R.

3. (1.0) Seja A matriz $n \times n$. Prove que A é normal se e só se $\operatorname{tr}((A^*A)^2) = \operatorname{tr}((A^*)^2A^2)$.

FIM