Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

1º Semestre 2013/2014
21 de dezembro de 2013
Duração: 90 minutos

3º TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR

CURSO: Engenharia Aeroespacial

1. Para cada escalar real α seja $A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ \alpha & \alpha & 2\alpha \\ 1 & 0 & -\alpha \end{bmatrix}$.

   (a) (1.0) Determine o polinómio característico de A e os valores próprios de A.

   (b) (1.0) Identifique o conjunto dos valores de α para os quais A é diagonalizável.

   (c) (1.0) Para $\alpha = -1$ encontre matrizes, D diagonal e P invertível, tais que $D = P^{-1}AP$.

   (d) (1.0) Identifique o conjunto dos valores de α para os quais A é unitariamente ou ortogonalmente diagonalizável.

2. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $\mathcal{B}_1 = \{1+t+t^2, 1-t, -t+t^2\}$ base ordenada de $\mathcal{P}_2$; $\mathcal{B}_2 = \{(2,-2,4),(0,2,0),(0,0,2)\}$ e $\mathcal{B}_2' = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ bases ordenadas de $\mathbb{R}^3$. Sejam $T : \mathcal{P}_2 \to \mathbb{R}^3$ e $R : \mathbb{R}^3 \to \mathcal{P}_2$ transformações lineares tais que

$$A = M(T; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2), \qquad A^{-1} = M(R; \mathcal{B}_2', \mathcal{B}_1).$$

   (a) (1.0) Calcule $\dim(\mathcal{I}(T) \cap \mathcal{N}(R))$.

   (b) (1.0) Determine $M(R \circ T; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1)$.

   (c) (1.0) Resolva, em $\mathbb{R}^3$, a equação linear $R(x,y,z) = 2 + 2t + 2t^2$.

3. Considere $\mathbb{R}^4$ munido com o produto interno usual e $F = L(\{u_1, u_2, u_3\})$ o subespaço linear de $\mathbb{R}^4$ gerado pelos vectores $u_1 = (1,0,1,0), u_2 = (0,1,0,1), u_3 = (1,-1,1,-1)$.

   (a) (1.0) Determine uma base ortogonal para o complemento ortogonal $F^\perp$.

   (b) (1.0) Calcule a distância entre $(1,0,3,0)$ e F.

4. (1.0) Considere $\mathbb{R}^n$ munido com um produto interno e $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma função tal que

$$\langle T(u), T(v) \rangle = \langle u, v \rangle \quad \text{para quaisquer } u, v \in \mathbb{R}^n.$$

   Prove que T é uma transformação linear.

FIM