Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Ano Lectivo 2013/2014
21 de dezembro de 2013
Duração: 90 minutos

RESOLUÇÃO DO TESTE 3 DE ÁLGEBRA LINEAR

CURSO: MEAer

1. (a) $p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (\alpha - \lambda)\det\begin{bmatrix} \alpha-\lambda & 2\alpha \\ 0 & -\alpha-\lambda \end{bmatrix} = -(\lambda+\alpha)(\lambda-\alpha)^2$. Logo $\lambda_1 = -\alpha$ e $\lambda_2 = \alpha$ são os valores próprios de A.

   (b) Para $\alpha = 0$, temos $\lambda_1 = \lambda_2$, i.e. $\text{ma}(\lambda_1) = 3$; além disso $\text{mg}(\lambda_1)=\dim(\mathcal{N}(A)) = 2$, logo A não é diagonalizável. Para $\alpha \neq 0$, $\text{ma}(\lambda_1) = 1$, $\text{ma}(\lambda_2) = 2$ e $\text{mg}(\lambda_1) = 1$; além disso $E_{\lambda_2} = \mathcal{N}(A - \lambda_2 I) = \mathcal{N}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 2\alpha \\ 1 & 0 & -2\alpha \end{bmatrix}$, pelo que $\text{mg}(\lambda_2) = 2$ sse $\alpha = -1$ e nos outros casos $\text{mg}(\lambda_2) = 1$. Conclusão: A é diagonaliável sse $\alpha = -1$.

   (c) Por b), A é diagonalizável para $\alpha{=}-1$. Mais, $\{(0,1,-2)\}$ é uma base para E_{λ_1} e $\{(2,0,-1),(0,1,0)\}$ base para E_{λ_1}; logo $D{=}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $P{=}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ satisfazem as condições requeridas.

   (d) Para $\alpha = -1$, A não é uma matriz normal pois $(AA^T)_{(1,1)} = 1 \neq 3 = (A^TA)_{(1,1)}$, pelo que A não é unitariamente diagonalizável (logo não é ortogonalmente diagonalizável). Para $\alpha \neq -1$, A não é diagonalizável, por b), pelo que A não é unitariamente (ortogonalmente) diagonalizável.

2. (a) $\mathcal{N}(R) = \{(0,0,0)\}$ i.e. R é injectiva, pois A (e A^{-1}) é invertível. Logo $\dim(\mathcal{I}(T) \cap \mathcal{N}(R)){=}0$.

   (b) $M(R\circ T;\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_1){=}M(R;\mathcal{B}_2',\mathcal{B}_1)M(I;\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_2')M(T;\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2){=}A^{-1}S_{\mathcal{B}_2\to\mathcal{B}_2'}A{=}2A$ pois $S_{\mathcal{B}_2\to\mathcal{B}_2'} = 2A$.

   (c) R é bijectivo e $R^{-1}(2+2t+2t^2) = 2R^{-1}(1+t+t^2) = 2(1,-1,2)$ pois $M(R^{-1};\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2') = A$. Assim $(x,y,z) = (2,-2,4)$ é a única solução da equação linear $R(x,y,z) = 2+2t+2t^2$.

3. (a) Note que $u_3 = u_1 - u_2$ pelo que $\{u_1,u_2\}$ é uma base para F e portanto $F^\perp = \mathcal{N}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Logo, $\{(1,0,-1,0),(0,1,0,-1)\}$ é uma base para $F^\perp$, que é ortogonal.

   (b) $d\left((1,0,3,0),F\right){=}||P_{F^\perp}(1,0,3,0)||{=}||\frac{\langle(1,0,3,0),(1,0,-1,0)\rangle}{\langle(1,0,-1,0),(1,0,-1,0)\rangle}(1,0,-1,0){+}\frac{\langle(1,0,3,0),(0,1,0,-1)\rangle}{\langle(0,1,0,-1),((0,1,0,-1)\rangle}(0,1,0,-1)||$ $= ||\frac{-2}{2}(0,1,0,-1)+(0,0,0,0)|| = \sqrt{2}$.

4. Teremos que demonstrar que $T(u+\alpha v) = T(u)+\alpha T(v)$ para quaisquer $u,v\in\mathbb{R}^n$, $\alpha\in\mathbb{R}$. Ora

$$
\begin{aligned}
||T(u+\alpha v)-T(u)-\alpha T(v)||^2 &\underset{(*)}{=} \langle T(u+\alpha v)-T(u)-\alpha T(v), T(u+\alpha v)-T(u)-\alpha T(v)\rangle \\
&\underset{(**)}{=} \langle T(u+\alpha v),T(u+\alpha v)\rangle - \langle T(u+\alpha v),T(u)\rangle - \alpha\langle T(u+\alpha v),T(v)\rangle - \langle T(u),T(u+\alpha v)\rangle \\
&\quad + \langle T(u),T(u)\rangle + \alpha\langle T(u),T(v)\rangle - \alpha\langle T(v),T(u+\alpha v)\rangle + \alpha\langle T(v),T(u)\rangle + \alpha^2\langle T(v),T(v)\rangle \\
&\underset{(***)}{=} \langle u+\alpha v,u+\alpha v\rangle - \langle u+\alpha v,u\rangle - \alpha\langle u+\alpha v,v\rangle - \langle u,u+\alpha v\rangle + \langle u,u\rangle + \alpha\langle u,v\rangle - \alpha\langle v,u+\alpha v\rangle + \alpha\langle v,u\rangle + \alpha^2\langle v,v\rangle \\
&\underset{(****)}{=} 0+0+0 = 0
\end{aligned}
$$

como pretendido (em (*) usamos a definição de norma, em (**) e (****) usamos por por fiversas vezes a linearidade do produto interno e em (***) a hipótese do problema por 9 vezes).